Вісімнадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

З 8 по 11 травня цього року відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8–10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у студентському військово-спортивному таборі "Сосновий" у місті Українка.

Цього року у фестивалі взяли участь команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Львівського фізико-математичного ліцею, фізико-математичної гімназії № 17 (м. Вінниця), фізико-математичної школи № 42 ім. академіка І. Векуа (м. Тбілісі, Грузія), київські команди Українського фізико-математичного ліцею, ліцею "Наукова зміна", природничо-наукового ліцею № 145, гімназії № 34 "Либідь" ім. В. Максименка та Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер".

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці усної олімпіади (10 клас)

I місце: Дмитро Руденко ("Лідер").

II місце: Ілля Лазуренко (ХФМЛ №27), Михайло Штанденко ("Лідер").

III місце: Андрій Абдулаєв ("Наукова зміна"), Антон Вахітов ("Наукова зміна"), Устин Сахнюк (ХФМЛ №27), Гліб Солоджук (ЛФМЛ), Антон Лисойван (АГ №45, Харків), Назар Нестерук (ФМГ №17, Вінниця), Максим Обозний (АГ №45, Харків), Михайло Пасічник (ЛФМЛ).

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Святослав Денисков (ХФМЛ №27), Георгій Коваль (ХФМЛ №27), Вадим Пашковський (ХФМЛ №27), Юлія Татарінова (ХФМЛ №27).

II місце: Арсеній Галайда (ХФМЛ №27), Борис Трегубенко ("Лідер"), Єлизавета Горох (ПНЛ №145), Антон Камінський (ПНЛ №145), Владислав Матвійчук ("Лідер"), Даніель Матузка ("Лідер"), Антон Гаврилюк ("Наукова зміна"), Ірина Гонцовська (ЛФМЛ), Софія Заозерська (АГ №45, Харків).

---

[1]механіко-математичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка

[2]Інститут математики НАН України

III місце: Тимур Семелінський (ХФМЛ №27), Роксолана Іванчук (“Наукова зміна”), Андрій Валюх (УФМЛ), Вадим Гассєєв (ХФМЛ №27), Артем Піковець (ХФМЛ №27), Назар Тхір (ЛФМЛ), Юрій Ферендович (ЛФМЛ), Радан Шлапак (“Лідер”), Костянтин Шемчук (“Лідер”).

9 клас

I місце: Данило Гоцківський (ЛФМЛ).

II місце: не присуджувалося.

III місце: Дмитро Рощупкін (АГ №45, Харків), Данило Волобуєв (“Лідер”), Деметре Гелашвілі (ФМШ №42, Тбілісі, Грузія), Яна Колодач (“Лідер”), Захар Наумець (“Лідер”), Еліна Соскіна (“Лідер”), Анастасія Швець (ЛФМЛ).

10 клас

I місце: Ілля Лазуренко (ХФМЛ №27).

II місце: Андрій Абдулаєв (“Наукова зміна”), Гліб Солоджук (ЛФМЛ), Антон Лисойван (АГ №45, Харків).

III місце: Михайло Пасічник (ЛФМЛ), Арсен Дойничко (“Лідер”), Аліса Баклан (“Лідер”), Антон Вахітов (“Наукова зміна”), Ольга Жур (“Лідер”), Дмитро Руденко (“Лідер”), Михайло Штанденко (“Лідер”).

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Кетяг бузку складається із квіток з 4 або 5 пелюстками. Кількість квіток та загальна кількість пелюсток є повними квадратами. Чи може кількість квіток з 4 пелюстками ділитися на кількість квіток з 5 пелюстками?

2. У турнірі брали участь $n \geq 2$ команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. За поразку команда отримує 0 очок, а за перемогу — стільки очок, скільки у неї до цього було поразок. При яких n всі команди могли набрати однакову кількість очок?

3. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник, в якому $\angle BAC = 120°$, D — середина BC, DE — висота трикутника ADC, M — середина DE. Довести, що $BM = 3AM$.

4. По колу стоять 99 гномів, деякі з них носять капелюхи. Жодні гноми у капелюхах не стоять поряд та між жодними гномами у капелюхах не стоїть рівно 48 гномів. Якою є найбільша можлива кількість гномів у капелюхах?

5. Чи можна заповнити клітинки таблиці розміру 2019×2019 попарно різними натуральними числами так, що у кожному прямокутнику розміру 1×2 або 2×1 більше число ділиться на менше, а відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого не перевищує 2019^4?

9 клас

1. Див. задачу 8.1.

2. Див. задачу 8.2.

3. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $a + b + c \geq 3$. Довести, що $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

4. Нехай D — середина основи BC рівнобедреного трикутника ABC, E — точка на стороні AC така, що $\angle CDE = 60^\circ$, M — середина DE. Довести, що $\angle AME = \angle BMD$.
5. Див. задачу 8.5.

10 клас

1. Див. задачу 8.1.
2. Нехай $a, b, c > 0$ та $abc \geq 1$. Довести, що $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.
3. У турнірі брали участь $2n$, $n \geq 2$, команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. За поразку команда отримує 0 очок, а за перемогу — стільки очок, скільки у неї до цього було поразок. При яких n всі команди могли набрати однакову ненульову кількість очок?
4. Див. задачу 9.4.
5. Чи можна заповнити клітинки таблиці розміру 2019×2019 попарно різними натуральними числами так, що у кожному прямокутнику розміру 1×2 або 2×1 більше число ділиться на менше, а відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого не перевищує 2019?

Автори задач: В. Брайман (8.1=9.1=10.1, 8.2=9.2∼10.3, 8.3∼9.4=10.4), В. Брайман та О. Толесніков (8.5=9.5), О. Руденко (8.4, 9.3∼10.2), О. Толесніков (10.5).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Множина $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ розділена на три підмножини A, B та C. Для кожної підмножини обчислили суму її елементів, добуток її елементів та загальну суму цифр її елементів. Чи могло так статись, що A має строго найбільшу суму елементів, B — строго найбільший добуток, а C — строго найбільшу суму цифр?
2. Знайдіть усі дійсні a, для яких існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є константою та для всіх дійсних значень x задовольняє одночасно співвідношенням $f(ax) = a^2 f(x)$ та $f(f(x)) = af(x)$.
3. Аліна та Сашко грають у таку гру. Вони по черзі записують на дошці натуральні числа від 1 до 5, причому Аліна робить перший хід. Гра закінчується, коли на дошці буде рівно n чисел. Якщо їх сума ділиться на 9, то виграє Сашко, якщо не ділиться — Аліна. Знайдіть усі натуральні n, за яких Аліна може забезпечити собі перемогу.
4. У трикутнику ABC ($AB < AC$) бісектриса кута A перетинає описане коло трикутника в точці D. Серединний перпендикуляр відрізка AC перетинає бісектрису зовнішнього до BAC кута у точці E. Доведіть, що середина AB лежить на описаному колі трикутника ADE.
5. Назвемо п'ятірку цілих чисел *переставною*, якщо її елементи можна позначити a, b, c, d, e в деякому порядку так, що $a-b+c-d+e = 171$. Знайдіть усі впорядковані набори з 2019 цілих чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{2019}$ такі, що при розміщенні їх по колу за годинниковою стрілкою довільні п'ять чисел, які йдуть поспіль, утворюють переставну п'ятірку.
6. Три попарно різні натуральні числа a, b і c, де НСД$(a, b, c) = 1$, задовольняють умовам $(b-c)^2$ ділиться на a, $(a-c)^2$ ділиться на b та $(a-b)^2$ ділиться на c. Доведіть, що не існує невиродженого трикутника зі сторонами a, b і c.

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)[3]

1 тур[4]

1.1. Діагоналі трапеції з основами a та b взаємно перпендикулярні. Знайдіть найбільше можливе значення висоти трапеції.

1.2. Відомо, що $abc \neq 0$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$ та $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 6$. Знайдіть $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$.

1.3. У шаховому турнірі брали участь учні 8 та 9 класів, причому учнів 9 класу було в 10 разів більше, ніж учнів 8 класу. Кожен учасник турніру зустрічався з будь-яким іншим тільки один раз. При підведенні підсумків турніру виявилося, що учні 9 класу набрали разом у 4,5 рази більше очок, ніж усі учні 8 класу. Скільки очок набрали учні 8 класу (за перемогу у шахах дається одне очко, за нічию — пів-очка, а за поразку — 0 очок)?

1.4. Скільки точних квадратів міститься серед чисел
а) $2^k + 4^k,\ k \in \mathbb{N}$; б) $2^k + 4^m,\ k, m \in \mathbb{N}$?

2 тур

2.1. Знайти всі пари чисел (x, y), які задовольняють рівняння

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + y^2 + 2.$$

2.2. Всередині кута ABC обрано точку D, а на відрізках BA і BC обрано точки X і Y відповідно так, що $\angle AXD = \angle BXY$ і $\angle CYD = \angle BYX$. Знайдіть градусну міру кута XDY, якщо $\angle ABC = 20°$.

2.3. Доведіть, що жоден член послідовності

$$a_n = \left[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}\right],\ n \in \mathbb{N},$$

не ділиться націло на 7. Тут $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x.

2.4. Чи існує многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами, для якого виконуються такі умови: 1) вільний член многочлена дорівнює 2019; 2) числа 1 і -1 є його коренями; 3) існує таке $x_0 \in \mathbb{Z}$, що $P(x_0) = 2018$?

3 тур

3.1. Десятковий запис кожного із чисел 2^n і 5^n $(n \in \mathbb{N})$ починається з однієї й тієї ж цифри. Знайдіть цю цифру.

3.2. Додатні числа a, b та c такі, що $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

3.3. Трикутник ABC вписаний в коло. Точки A_1, B_1 та C_1 діаметрально протилежні точкам A, B та C відповідно. Точки M_1, M_2 та M_3 — середини сторін BC, AC та BA відповідно. Доведіть, що прямі A_1M_1, B_1M_2 та C_1M_3 перетинаються в одній точці.

---

[3] Експрес було присвячено пам'яті В. Полонського (1957–2019). Задачі запозичені з експресів фестивалів 2004–2014 років, упорядниками завдань яких були В. Полонський та М. Якір.

[4] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

3.4. Знайдіть усі послідовності натуральних чисел $\{a_n\}$ таких, що $a_1 = 1$ та для будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$.

Розв'язки та вказівки.
Олімпіада

8.1. *Відповідь:* ні.
Нехай у кетязі a квіток з 5 пелюстками та na квіток з 4 пелюстками. Тоді $(n+1)a$ та $(4n+5)a$ є квадратами, а отже їх добуток $(n+1)(4n+5)a^2$ теж є квадратом. Тому $(n+1)(4n+5)$ є квадратом, а оскільки вирази у дужках є взаємно простими, то кожен з них є квадратом. Звідси випливає, що послідовні натуральні числа $4n+4$ та $4n+5$ є квадратами, що неможливо.

Зауваження. Для доведення того, що $(n+1)(4n+5)$ не є квадратом, також можна помітити, що

$$(2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4 < (n+1)(4n+5) = 4n^2 + 9n + 5 < 4n^2 + 12n + 9 = (2n+3)^2.$$

8.2. *Відповідь:* при всіх $n \geq 2$.
Покажемо, що при будь-якому $n \geq 2$ всі команди могли набрати по 0 очок. Занумеруємо команди. Нехай спочатку перша команда програла всім командам з більшими номерами, потім друга команда програла всім командам з більшими номерами і так далі. Тоді кожна команда жодного разу не вигравала після першої поразки, а тому набрала 0 очок.

8.3. *I спосіб.* Нехай F — середина AC та G — середина CF (рис. 1). Трикутник ADF рівносторонній, тому його висота DE є медіаною. Отже, E — середина AF, тобто $AE = EF = FG = GC$. Оскільки FM — середня лінія трикутника EDG, то $FM \parallel GD$ та $GD = 2FM$, а оскільки GD — середня лінія трикутника FBC, то $GD \parallel FB$ та $FB = 2GD$. Таким чином, $F - M - B$ — одна пряма та $FB = 4FM$. Звідси $BM = 3FM$. Прямокутні трикутники AEM та FEM рівні за двома катетами, отже $FM = AM$ та $BM = 3AM$.

II спосіб. Нехай K — середина BE та T — точка перетину медіан BM та DK трикутника BDE (рис. 2). Тоді DK — середня лінія трикутника BCE, звідки $DK = \frac{1}{2}CE$ та $DK \parallel CE$, тобто $DK \perp DE$. Оскільки AED та EDC — прямокутні трикутники з кутом $30°$, то $CE = \sqrt{3}DE$ та $DE = \sqrt{3}AE$. Тому $CE = 3AE$ та $DT = \frac{2}{3}DK = \frac{1}{3}CE = AE$. Прямокутні трикутники AEM та TDM рівні за двома катетами, отже $AM = TM = \frac{1}{3}BM$.

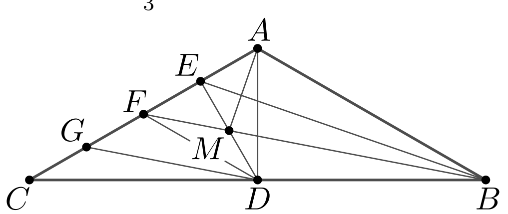

Рис. 1.

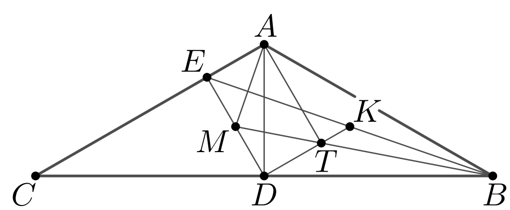

Рис. 2.

8.4. *Відповідь:* 33 гноми.
Нехай по колу послідовно стоять гноми $A_1, A_2, \ldots, A_{99}$. Переставимо гномів так, аби

гноми, між якими стояло рівно 48 гномів, стали сусідами:

$$A_1, A_{50}, A_{99}, A_{49}, A_{98}, \ldots, A_{53}, A_3, A_{52}, A_2, A_{51}.$$

Тепер будь-які гноми, які раніше стояли поряд, стоять через одного. Після перестановки жодні гноми у капелюхах не стоять поряд та між жодними гномами у капелюхах не стоїть рівно один гном. Тому серед будь-яких трьох сусідніх гномів щонайбільше один гном носить капелюх, тобто гномів у капелюхах не більше 33. Гномів у капелюхах може бути рівно 33, якщо після перестановки капелюх носить кожен третій гном.

8.5. *Відповідь:* так.
Розфарбуємо клітинки таблиці у шаховому порядку так, що кутові клітинки чорні. Таблиця містить k чорних та $k-1$ білих клітинок, де $k = \frac{2019^2+1}{2}$. Покладемо $N = \text{НСК}(2, 3, \ldots, k)$ і заповнимо чорні клітинки числами $N, 2N, \ldots, kN$, а білі клітинки числами $\frac{N}{2}, \frac{N}{3}, \ldots, \frac{N}{k}$ у довільному порядку. Тоді умова задачі виконується, оскільки кожне число у чорній клітинці ділиться на кожне число у білій клітинці та відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого дорівнює $k^2 < 2019^4$.

9.3. Перепишемо нерівність у вигляді $a^3(a-1) + b^2(b-1) + c(c-1) \geq 0$, або

$$(a^3-1)(a-1) + (b^2-1)(b-1) + (c-1)^2 + (a+b+c-3) \geq 0.$$

Але $(a^3-1)(a-1) \geq 0$, оскільки вирази у дужках завжди мають однаковий знак, аналогічно $(b^2-1)(b-1) \geq 0$ та $(c-1)^2 \geq 0$. Залишається зауважити, що $a+b+c \geq 3$ за умовою.

9.4. Відмітимо на прямій AD таку точку F, що $CF \parallel DE$. Нехай G — середина CF (рис. 3). При гомотетії, яка переводить трикутник ADE у трикутник AFC, точка M переходить у точку G, отже $A-M-G$ — одна пряма та $\angle AME = \angle GMD$ як вертикальні кути. Оскільки G — середина гіпотенузи CF прямокутного трикутника CDF, в якому $\angle FCD = \angle CDE = 60°$, то CDG — рівносторонній трикутник. Тому $GD = CD = BD$. Також

$$\angle MDG = \angle MDC + \angle CDG = 60° + 60° = 120°$$

та $\angle MDB = 180° - \angle CDE = 120°$. Отже, трикутники MDG та MDB рівні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $\angle BMD = \angle GMD = \angle AME$.

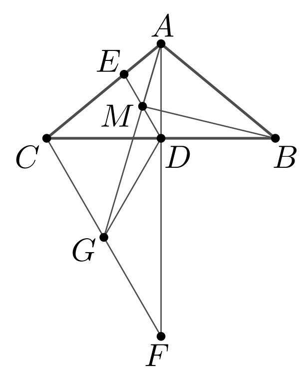

Рис. 3.

10.2. *I спосіб.* Перепишемо нерівність у вигляді $a^3(a-1) + b^2(b-1) + c(c-1) \geq 0$, або

$$(a^3-1)(a-1) + (b^2-1)(b-1) + (c-1)^2 + (a+b+c-3) \geq 0.$$

Але $(a^3-1)(a-1) \geq 0$, оскільки вирази у дужках завжди мають однаковий знак, аналогічно $(b^2-1)(b-1) \geq 0$ та $(c-1)^2 \geq 0$. Залишається зауважити, що $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$ за нерівністю Коші.

II спосіб. За нерівністю Коші

$$\frac{42a^4+4b^3+6c^2}{52} \geq \sqrt[52]{a^{168}b^{12}c^{12}} \geq \sqrt[52]{a^{156}} = a^3,$$
$$\frac{3a^4+30b^3+6c^2}{39} \geq \sqrt[39]{a^{12}b^{90}c^{12}} \geq \sqrt[39]{b^{78}} = b^2,$$
$$\frac{3a^4+4b^3+19c^2}{26} \geq \sqrt[26]{a^{12}b^{12}c^{38}} \geq \sqrt[26]{c^{26}} = c.$$

Залишається додати ці нерівності.

10.3. *Відповідь:* при всіх $n \geq 2$.

I спосіб. Будемо записувати результат виступу команди у турнірі як послідовність літер В ("виграш") і П ("програш"). Занумеруємо команди і покажемо індукцією за n, що $2n$ команд могли зіграти так, що результат кожної команди з непарним номером має вигляд ВПВ...ПВ, а кожної команди з парним номером — ПВП...ВП. База індукції: $n = 1$, перша команда виграє у другої. При $n > 1$ нехай спочатку перша команда виграє у другої, програє третій, виграє у четвертої, ..., програє $(2n-1)$-й та виграє у $2n$-ї, а потім друга команда виграє у третьої, програє четвертій, ..., виграє у $(2n-1)$-ї та програє $2n$-й. Тепер результати першої та другої команд це ВПВ...ПВ та ПВП...ВП відповідно, результати інших команд з непарними номерами починаються з ВП, а інших команд з парними номерами — з ПВ. Залишилося провести всі матчі між $2n-2$ командами з номерами від 3 до $2n$ так, аби команди з непарним номером здобули результат ВПВ...ПВ, а команди з парним номером — ПВП...ВП. Це можливо за припущенням індукції.

У наведеному турнірі всі команди наберуть однакову кількість очок. Справді, кожен з результатів ВПВ...ПВ та ПВП...ВП дає таку ж кількість очок, як ПВ...ПВ ($2n-2$ літери), бо В на початку та П у кінці не впливають на набрані очки. Залишилося зауважити, що при $n > 1$ ця кількість буде ненульовою.

II спосіб. Доведемо, що при будь-якому $N \geq 4$ у турнірі за участю N команд всі команди можуть набрати по 1 очку. Нехай шукані турніри існують при $N = 4$ та при $N = k$. Покажемо, що тоді шуканий турнір також існує у випадку $N = k + 4$ команд. Нехай спочатку k команд проведуть усі ігри між собою та наберуть по 1 очку. Потім ці k команд програють усі матчі іншим 4 командам. При цьому жодна команда не набере очок та інші 4 команди не здобудуть жодної поразки. Нарешті, інші 4 команди можуть провести всі ігри між собою та набрати по 1 очку.

Залишається навести приклади шуканих турнірів для $N = 4, 5, 6, 7$. Звідси за принципом математичної індукції випливатиме, що такі турніри існують при всіх $N \geq 4$.

Занумеруємо команди та будемо позначати i_j гру, в якій команда з номером i виграла у команди з номером j. Неважко перевірити, що шукані турніри можуть відбуватися, як показано у таблиці.

N	Порядок проведення і результати матчів
4	1_2, 2_3, 3_1, 4_2, 1_4, 4_3.
5	1_2, 2_3, 3_1, 4_2, 5_2, 4_3, 5_3, 1_4, 4_5, 5_1.
6	1_2, 2_3, 5_2, 6_2, 1_4, 4_2, 3_4, 5_4, 6_4, 1_3, 5_3, 6_5, 5_1, 1_6, 6_3.
7	1_2, 2_3, 5_2, 6_2, 7_2, 3_4, 5_3, 6_3, 7_3, 4_2, 1_3, 5_4, 6_4, 7_4, 7_1, 5_7, 1_4, 6_5, 5_1, 7_6, 6_1.

10.5. *Відповідь:* так.
Зрозуміло, що достатньо спочатку заповнити таблицю раціональними числами так, аби у кожному прямокутнику з двох клітинок відношення більшого числа до меншого було цілим, а потім домножити всі числа у таблиці на їх спільний знаменник.

Розглянемо послідовності $\{a_n, n \geq 1\}$ та $\{b_n, n \geq 1\}$, задані таким чином:

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n, & \text{якщо } a_n \leq 1, \\ \frac{a_n}{2}, & \text{якщо } a_n > 1, \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} 7b_n, & \text{якщо } b_n \leq 1, \\ \frac{b_n}{5}, & \text{якщо } b_n > 1. \end{cases}$$

Запишемо у клітинку на перетині i-го рядка та j-го стовпчика таблиці число a_ib_j. У кожному прямокутнику розміру 1×2 стоять числа вигляду a_ib_j та a_ib_{j+1}, а у кожному прямокутнику 2×1 — числа вигляду a_ib_j та $a_{i+1}b_j$. Відношення більшого з цих чисел до меншого дорівнює відношенню сусідніх членів послідовності $\{b_n\}$ або $\{a_n\}$ відповідно, а отже є цілим. Зауважимо, що за побудовою $\frac{1}{2} < a_n \leq 3$ та $\frac{1}{5} < b_n \leq 7$ при всіх $n \geq 1$. Тому всі числа у таблиці не менші за $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ та не більші за $3 \cdot 7 = 21$. Отже, відношення будь-яких чисел у таблиці не перевищує $10 \cdot 21 = 210 < 2019$. Залишилося перевірити, що всі числа у таблиці є різними. Помітимо, що у клітинці на перетині i-го рядка та j-го стовпчика стоїть число вигляду $\frac{3^x \cdot 7^y}{2^z \cdot 5^t}$, де $x + z = i - 1$ та $y + t = j - 1$. Різним клітинкам відповідають різні четвірки (x, y, z, t), а отже і різні числа.

Усна математична олімпіада

1. *Відповідь:* так.
Неважко перевірити, що умова задачі виконується для підмножин $A = \{1, 9, 10\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ та $C = \{3, 7, 8\}$.

2. *Відповідь:* $a = 0$ або $a = 1$.
Перетворимо вираз $f(f(f(x)))$ двома способами:

$$f(f(f(x))) = af(f(x)) = a^2 f(x) \quad \text{і} \quad f(f(f(x))) = f(af(x)) = a^2 f(f(x)) = a^3 f(x).$$

Отже, для всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо $a^2 f(x) = a^3 f(x)$, а оскільки $f(x) \not\equiv 0$, то $a^2 = a^3$, звідки $a = 0$ або $a = 1$. Для $a = 1$ умову очевидно задовольняє функція $f(x) = x$. Для $a = 0$ однією з можливих функцій є $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ при } x \neq 1. \end{cases}$

3. *Відповідь:* усі n, які не діляться на 6.
Нехай s_k — сума чисел після k-го ходу та r_k — остача від ділення s_k на 9.

Якщо Аліна робить останній хід, то очевидно вона виграє, зробивши так, що $r_n \neq 0$. Отже, при непарних n Аліна може забезпечити собі перемогу.

Покажемо також, що вона має виграшну стратегію при парних n, не кратних 6, тобто при $n = 6m + 2$ або $n = 6m + 4$. Першим ходом Аліна пише число 3, а потім якщо Сашко пише d, то Аліна у відповідь пише число $6 - d$. При $n = 6m + 2$ дістаємо $s_{6m+1} = 3 + 6 \cdot 3m$, тому $r_{6m+1} = 3$ і Сашко не зможе останнім ходом отримати число, кратне 9. Якщо ж $n = 6m + 4$, то $s_{6m+3} = 3 + 6(3m + 1)$. Тому $r_{6m+3} = 0$ і $r_{6m+4} \neq 0$, тобто Сашко знову програє.

При $n = 6m$ Сашко може забезпечити собі перемогу: якщо Аліна своїм ходом обирає число d, то Сашко має записати своїм наступним ходом число $6 - d$. Тоді $s_{6m} = 6 \cdot 3m = 18m$ та $r_{6m} = 0$.

4. Нехай K та L — середини сторін AB та AC відповідно, N — точка, симетрична D відносно K (рис. 4). Тоді $ADBN$ — паралелограм. Оскільки D — середина дуги $\smile BDC$, то $DB = DC$, звідки $AN = DB = DC$. Точка E лежить на серединному перпендикулярі до AC, отже $AE = CE$. Покажемо, що також $\angle NAE = \angle DCE$. Звідси випливатиме, що трикутники NAE та DCE рівні за двома сторонами і кутом між ними. Маємо

$$\begin{aligned}\angle DCE =&\angle DCB + \angle BCA + \angle ACE = \\ =&\angle DAB + \angle BCA + \angle EAC = \\ =&90^\circ + \angle BCA,\end{aligned}$$

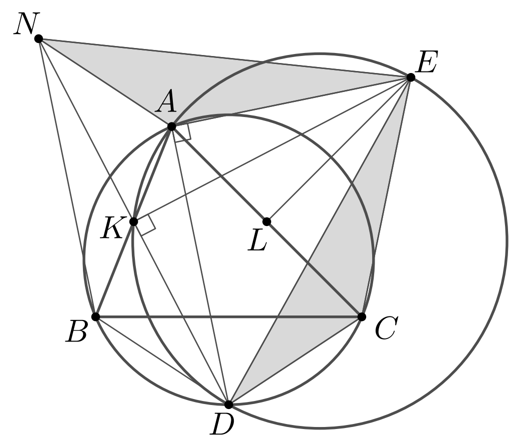

Рис. 4.

бо $\angle DAB + \angle EAC = \angle DAC + \angle EAC = \angle DAE = 90^\circ$ як кут між бісектрисами суміжних кутів. Також маємо

$$\begin{aligned}\angle NAE =&360^\circ - \angle NAD - \angle DAE = \\ =&360^\circ - (180^\circ - \angle BDA) - 90^\circ = 90^\circ + \angle BDA = 90^\circ + \angle BCA.\end{aligned}$$

Таким чином, $\angle NAE = \angle DCE$. Отже, трикутники NAE та DCE рівні, звідки $NE = DE$, тобто трикутник NED рівнобедрений. У цьому трикутнику медіана EK є висотою. Тому $\angle DKE = \angle DAE = 90^\circ$, звідки K лежить на колі з діаметром DE, яке є описаним колом трикутника ADE.

5. *Відповідь:* $n_1 = n_2 = \ldots = n_{2019} = 171$.
Покажемо, що $n_1 = n_2 = \ldots = n_{2019} = 171$ — єдиний розв'язок.

Замінимо кожне число n_i на колі числом $m_i = n_i - 171$. Умову $a - b + c - d + e = 171$ можна переписати у вигляді $(a - 171) - (b - 171) + (c - 171) - (d - 171) + (e - 171) = 0$, тому для нових чисел потрібно, щоб будь-які п'ять послідовних чисел на колі можна було позначити a, b, c, d, e у деякому порядку так, що $a - b + c - d + e = 0$. Доведемо, що це можливо лише у випадку, коли всі m_i дорівнюють 0 (а тому всі початкові числа n_i дорівнюють 171).

Припустимо, що існує ненульовий набір чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{2019}$, який задовольняє умову. Оскільки числа $a-b+c-d+e$ та $a+b+c+d+e$ мають однакову парність, то сума будь-яких п'яти послідовних чисел на колі є парною. Звідси випливає, що при будь-якому i

$$(m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + m_{i+3} + m_{i+4}) - (m_{i+1} + m_{i+2} + m_{i+3} + m_{i+4} + m_{i+5}) = m_i - m_{i+5}$$

є парним, а отже m_i та m_{i+5} завжди мають однакову парність (індекси розглядаються за модулем 2019). Але тоді m_i та $m_{i+2020} = m_{i+1}$ мають однакову парність, тобто будь-які сусідні числа на колі мають однакову парність. Отже, всі числа $m_1, m_2, \ldots, m_{2019}$ мають однакову парність. Оскільки сума $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ є парною, то всі числа парні. Таким чином, у будь-якому ненульовому наборі чисел, який задовольняє умову, всі числа парні. Проте після ділення всіх чисел набору на деякий степінь двійки дістанемо новий ненульовий набір чисел, який теж задовольняє умову, проте містить непарне число, суперечність.

6. Спочатку зауважимо, що кожні два з чисел a, b, c є взаємно простими. Справді, нехай, наприклад, a та b мають спільний простий дільник p. Тоді $(a-c)^2$ ділиться на b, а отже і на p. Оскільки a та $a-c$ діляться на p, то c теж ділиться на p, що суперечить умові НСД$(a, b, c) = 1$.

Без обмеження загальності $a < b < c$. За умовою $(c-a)^2(c-b)^2 = (c^2-(a+b)c+ab)^2$ ділиться на ab, а отже і $(c^2-(a+b)c)^2 = c^2(a+b-c)^2$ ділиться на ab, Оскільки c та ab взаємно прості, то $(a+b-c)^2$ теж ділиться на ab. Але якщо $a < b < c$ — сторони невиродженого трикутника, то $0 < a+b-c < a$ та $0 < a+b-c < b$. Тому $0 < (a+b-c)^2 < ab$ і подільність $(a+b-c)^2$ на ab неможлива, суперечність.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* $\frac{a+b}{2}$.

Нехай $ABCD$ — трапеція з основами BC і AD. Відкладемо на продовженні AD за точку D відрізок $DE = BC$. Тоді $BCED$ паралелограм, $CE \parallel BD$ і ACE — прямокутний трикутник з гіпотенузою $AE = a+b$. Нехай CH — висота трапеції. Тоді $CH = \sqrt{AH \cdot EH} \leq \frac{AE+EH}{2} = \frac{a+b}{2}$. Рівність $CH = \frac{a+b}{2}$ досягається у випадку рівнобічної трапеції.

1.2. *Відповідь:* 38.

Нехай $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z$. Тоді $xy + yz + zx = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 6$. Звідси

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 25 - 12 = 13.$$

Крім того, $xyz = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$. Маємо

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) + 3xyz = 38.$$

1.3. *Відповідь:* 10.

Нехай кількість учнів 8 класу дорівнює x, а кількість учнів 9 класу — $10x$. Кількість всіх учасників турніру — $11x$, тому було зіграно $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партій. Кількість очок, набраних учнями 8 класу, дорівнює $\frac{11x(11x-1)}{2} \cdot \frac{2}{11} = 11x^2 - x$. Кількість всіх зіграних учнями 8 класу партій дорівнює $\frac{x(x-1)}{2} + 10x^2$. Ця кількість не менша за кількість очок, набраних учнями 8 класу, отже можна записати нерівність $11x^2 - x \le \frac{x(x-1)}{2} + 10x^2$. Звідси $x^2 \le x$, $x \le 1$, $x = 1$.

1.4. *Відповідь:* а) жодного; б) нескінченно багато.

а) Помітимо, що $(2^k)^2 = 4^k < 2^k + 4^k < 4^k + 2 \cdot 2^k + 1 = (2^k + 1)^2$, тому $2^k + 4^k$ не може бути точним квадратом.

б) При $k = 2m + 3$ маємо $2^k + 4^m = 2^{2m+3} + 2^{2m} = 2^{2m} \cdot 9 = (3 \cdot 2^m)^2$.

2.1. *Відповідь:* (0, 0).

Оскільки $x^2 + 1 \ge 1$, $y^2 + 1 \ge 1$, то $\sqrt{x^2+1} \le x^2 + 1$ та $\sqrt{y^2+1} \le y^2 + 1$. Додаючи ці нерівності, одержуємо $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} \le x^2 + y^2 + 2$. Рівність досягається тоді й лише тоді, коли одночасно $\sqrt{x^2+1} = x^2 + 1$ та $\sqrt{y^2+1} = y^2 + 1$, тобто при $x = y = 0$.

2.2. *Відповідь:* 140°.

Маємо (рис. 5) $\angle DXY + \angle DYX =$

$$= 180^\circ - 2\angle BXY + 180^\circ - 2\angle BXY = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle XBY) = 40^\circ,$$

звідки $\angle XDY = 180^\circ - \angle DXY - \angle DYX = 140^\circ$.

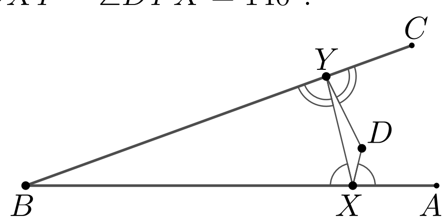

Рис. 5.

2.3. Маємо $n(n+2)(n+4)(n+6) = (n^2+6n)(n^2+6n+8)$. Позначимо $n^2+6n = t \ge 7$. Тоді $(n^2+6n)(n^2+6n+8) = t^2+8t$. Покажемо, що $\left[\sqrt{t^2+8t}\right] = t+3$ при всіх натуральних $t \ge 5$. Справді, $(t+3)^2 < t^2+8t < (t+4)^2$, звідки $t+3 < \sqrt{t^2+8t} < t+4$. Таким чином, $a_n = n^2+6n+3 = (n+3)^2-6$. Залишається помітити, що квадрат натурального числа не може давати остачу 6 при діленні на 7.

2.4. *Відповідь:* не існує.

З умови випливає, що $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x)$. Звідси якщо $x_0 \equiv 1 \pmod 3$ або $x_0 \equiv 2 \pmod 3$, то $P(x_0) \equiv 0 \pmod 3$. Крім того, маємо $P(x) = xR(x) + 2019$, а отже якщо $x_0 \equiv 0 \pmod 3$, то $P(x_0) \equiv 0 \pmod 3$. Таким чином, $P(x_0) \equiv 0 \pmod 3$ при усіх $x_0 \in \mathbb{Z}$, але $2018 \equiv 2 \pmod 3$.

3.1. Нехай шукана цифра дорівнює a. Тоді існують такі натуральні числа k та l, що $a \cdot 10^k < 2^n < (a+1) \cdot 10^k$, $a \cdot 10^l < 5^n < (a+1) \cdot 10^l$. Помножимо почленно отримані нерівності. Маємо $a^2 \cdot 10^{k+l} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+l}$. Звідси $a^2 < 10^{n-k-l} < (a+1)^2$. Остання нерівність можлива лише при $a = 3$. Залишилося навести приклад.

3.2. Скористаємося нерівністю $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$, яка виконується при всіх $x, y \ge 0$.

Можна записати

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{b+2c+a},\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{c+2a+b},\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c}.$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geq\frac{4}{b+2a+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{c+2b+a}.$$

Залишилося розділити обидві частини отриманої нерівності на 2 та врахувати, що $a+b+c=1$.

3.3. Нехай H — точка перетину висот трикутника ABC (рис. 6). Розглянемо чотирикутник HBA_1C. Оскільки $\angle A_1BA=\angle A_1CA=90°$, то $A_1B\parallel CH$ та $A_1C\parallel BH$. Отже, чотирикутник HBA_1C — паралелограм, а M_1 — точка перетину його діагоналей. Таким чином, точка H належить прямій A_1M_1. Аналогічно можна показати, що H належить прямим B_1M_2 і C_1M_3.

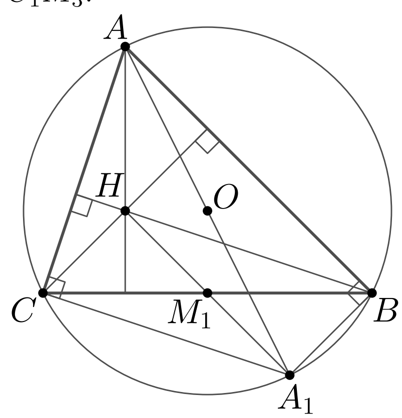

Рис. 6.

3.4. *Відповідь:* $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.
При $m=1$ маємо $a_{n+1}-a_n=1+n$. Підставляючи послідовно в отриману рівність числа $1,2,3,\ldots,n-1$, запишемо $a_2-a_1=2$, $a_3-a_2=3$, …, $a_n-a_{n-1}=n$. Додавши ці рівності, одержимо $a_n-a_1=2+3+\ldots+n$. Звідси $a_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Перевірка показує, що отримана послідовність задовольняє умову задачі.