Сімнадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

З 5 по 8 травня цього року відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8–10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у студентському військово-спортивному таборі "Сосновий" у місті Українка.

Цього року у фестивалі взяли участь команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю (м. Дніпро), Львівського фізико-математичного ліцею, фізико-математичної гімназії № 17 (м. Вінниця), фізико-математичної школи № 42 ім. академіка І. Векуа (м. Тбілісі, Грузія), київські команди Українського фізико-математичного ліцею, Русанівського ліцею, ліцею "Наукова зміна", гімназії № 34 "Либідь" ім. В. Максименка, Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер", а також збірна ліцею № 208, Новопечерської школи і природничо-наукового ліцею № 145 (всі — м. Київ).

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Ігор Пилаєв (ХФМЛ №27, 7 клас), Ілля Шкірко (ХФМЛ №27), Святослав Лушней (ЛФМЛ).

II місце: Маргарита Баклан ("Лідер"), Данило Волобуєв ("Лідер"), Роксолана Іванчук ("Наукова зміна", 7 клас), Яна Колодач ("Лідер"), Захар Наумець ("Лідер"), Артем Сдобнов (ХФМЛ №27), Артем Уразовський (ХФМЛ №27), Марко Лучка ("Лідер").

III місце: Еліна Соскіна ("Лідер"), Юлія Татарінова (ХФМЛ №27, 7 клас), Андрій Кравець ("Лідер", 7 клас), Костянтин Шемчук ("Лідер", 7 клас), Динь Лап Нам Ву (ХФМЛ №27), Святослав Денисков (ХФМЛ №27, 7 клас), Климентій Золотарьов (ХФМЛ №27), Ігор Ніколаєв ("Наукова зміна", 7 клас), Прохор Шляхтун (Русанівський ліцей), Віталій Голополосов (ЛФМЛ), Дмитро Гелашвілі (ФМШ № 42, Тбілісі, Грузія), Семен Андрієць ("Лідер", 7 клас), Анастасія Олексієнко ("Лідер"), Олександр Шестопалов (Русанівський ліцей), Данило Невмержицький (ЛФМЛ).

[1]механіко-математичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка

[2]Інститут математики НАН України

9 клас

I місце: Ярослав Романус (ЛФМЛ), Дмитро Руденко ("Лідер"), Марк Хасін (Русанівський ліцей).

II місце: Роман Костенко (ДОЛІФМП), Гліб Солоджук (ЛФМЛ), Андрій Цинцеус ("Лідер").

III місце: Олександр Дзюняк (ФМГ № 17, Вінниця), Анастасія Гриньова ("Лідер"), Ольга Жур (УФМЛ), Олена Лінник (АГ № 45, Харків), Ростислав Ляпкін (Русанівський ліцей), Назар Нестерук (ФМГ № 17, Вінниця), Максим Обозний (АГ № 45, Харків), Михайло Штанденко ("Лідер"), Альона Деречей ("Лідер"), Антон Вахітов ("Наукова зміна"), Володимир Точоний (Русанівський ліцей).

10 клас

I місце: Влада Петрусенко (Новопечерська школа).

II місце: Костянтин Луценко (УФМЛ), Максим Процик (ЛФМЛ), Михайло Цисін ("Лідер"), Владислав Шашков ("Лідер").

III місце: Юр-Любомисл Дехтяр ("Наукова зміна"), Єгор Панченко ("Наукова зміна"), Олеся Білик (ПНЛ № 145), Богдан-Ярема Дехтяр ("Наукова зміна"), Олена Кисленко (ліцей № 208), Назар Лаврентюк (ФМГ № 17, Вінниця), Антон Москальков ("Лідер"), Анастасія Руденко ("Лідер"), Михайло Тадля (УФМЛ), Лія Дулгер (ЛФМЛ).

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Назвемо замком квадрат 2×2, одну з клітинок якого займає вежа. Яку найбільшу кількість замків можна розташувати на дошці 7×7 так, аби замки не мали спільних клітинок та всі вежі знаходились на діагоналях дошки?

2. Нехай M — точка перетину медіан AD та BE прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відомо, що описані кола трикутників AEM та CDM дотикаються. Знайти кут $\angle BMC$.

3. Коло поділено 2018 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Програє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

4. Знайти всі натуральні числа n, для яких найбільший простий дільник числа $n^2 + 3$ дорівнює найменшому простому дільнику числа $n^4 + 6$.

5. На столі викладені у ряд n ($n \geq 10$) карток з номерами $1, 2, \ldots, n$ числами вниз так, що числа на будь-яких сусідніх картках відрізняються принаймні на 5. Чи завжди достатньо перевернути щонайбільше $n - 5$ карток, аби дізнатись, на якій картці записано номер n? (Картку з числом n перевертати не обов'язково.)

9 клас

1. Див. задачу 8.1.

2. Нехай M — точка перетину медіан AD та BE прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), ω_1 та ω_2 — описані кола трикутників AEM та CDM. Відомо, що кола ω_1 та ω_2 дотикаються. Знайти відношення, в якому коло ω_1 ділить AB.
3. Для довільних $x, y \geq 0$ довести, що $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2\sqrt{2xy}$.
4. Чи існують такі натуральні числа a та b, що кожне з чисел $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ та $5^a + 2^b$ ділиться на 29?
5. Коло поділено 2019 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Програє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

10 клас

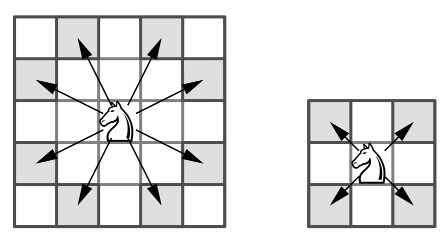
1. Див. задачу 8.1.
2. Нехай M — точка перетину медіан AD та BE прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), ω_1 та ω_2 — описані кола трикутників AEM та CDM. Відомо, що кола ω_1 та ω_2 дотикаються. Знайти відношення, в якому коло ω_2 ділить AC.
3. Див. задачу 9.4.
4. Для довільних $x, y \geq 0$ довести, що $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq \frac{8y\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}$.
5. Коло поділено 2019 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Виграє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

Автори задач: В. Брайман (8.1=9.1=10.1, 8.2∼9.2∼10.2, 8.4, 9.4=10.3), О. Руденко (8.5, 9.3∼10.4), В. Фомічьов (8.3∼9.5), В. Фомічьов та О. Руденко (10.5).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Знайдіть усі натуральні $n \geq 2$, для яких $P(n) + \left[\sqrt{n}\right] = P(n+1) + \left[\sqrt{n+1}\right]$, де $P(x)$ — найбільший простий дільник числа x, а $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x.

2. Шаховий кінь ушкодив ногу і кульгає. Він робить по черзі нормальні ходи та короткі ходи, під час яких рухається по діагоналі в сусідню клітинку (рис. 1). Кульгавий кінь рухається по клітинках дошки 5×6, починаючи з нормального ходу. Яку найбільшу кількість ходів він може зробити, якщо він починає з довільної клітинки за своїм вибором та не заходить у жодну клітинку більше одного разу?



Нормальний хід Короткий хід

Рис. 1.

3. Висоти AD, BE та CF гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що

$$\frac{AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB}{AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF} \leq 2.$$

4. Добуток додатних дійсних чисел a_1, a_2, …, a_n дорівнює 1. Доведіть, що

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}+\ldots+$$
$$+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}\geq\frac{2^n-1}{2^n}.$$

5. Нехай у таблиці $m\times n$ кожна клітинка пофарбована у білий або чорний колір. Називатимемо чорну клітинку *особливою*, якщо зліва від неї в її рядку і вище за неї в її стовпчику є білі клітинки. Знайдіть кількість таблиць $2\times n$, які не містять особливих чорних клітинок. (На рис. 2 зображено таблицю 4×5, яка не містить особливих чорних клітинок.)

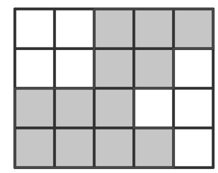


Рис. 2.

6. Нехай функція $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така, що для кожного натурального n кількість натуральних дільників n дорівнює $f(f(n))$. Наприклад, $f(f(6))=4$, $f(f(25))=3$. Доведіть, що якщо p — просте число, то $f(p)$ також просте.

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[3]

1.1. Яких шестицифрових чисел більше: тих, які можна подати у вигляді добутку двох трицифрових чисел, або тих, які не можна подати у такому вигляді?

1.2. Із середини кожної сторони гострокутного трикутника опущено перпендикуляри на дві інші сторони. Доведіть, що площа обмеженого ними шестикутника дорівнює половині площі трикутника.

1.3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}[x]|y|=1010,\\ x\,[y]=2018.\end{cases}$

1.4. Знайдіть найбільше значення k, при якому нерівність

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{3ab^2}\geq\frac{k}{(a+b)^3}$$

виконується при будь-яких додатних значеннях a і b.

2 тур

2.1. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m;n)$, які задовольняють рівність $m^2-mn+n^2=7$.

2.2. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено два промені, що утворюють між собою кут $45°$. Один з них перетинає сторону BC у точці E, а діагональ BD у точці P, інший — сторону CD у точці F, а діагональ BD у точці Q. Доведіть, що площа трикутника AEF удвічі більша за площу трикутника APQ.

2.3. Компанія друзів, яка складається з n осіб, відвідала разом декілька театральних вистав. Відомо, що у глядацькій залі вони завжди займали n місць поспіль в одному

[3]На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

ряду, а будь-які два друга рівно на одній виставі сиділи поруч. Доведіть, що n — парне число.

2.4. Чи існують попарно різні натуральні числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$, які задовольняють рівність
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2018}^2 = x_{2019}^2?$$

3 тур

3.1. Числа x і y такі, що $x^2 + xy + y^2 = x + y$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу $x^2 + y^2$.

3.2. Чи правда, що число 1 004 041 є простим?

3.3. Ряд натуральних чисел розбитий на декілька арифметичних прогресій. Доведіть, що хоча б у одній із цих прогресій перший член ділиться без остачі на її різницю.

3.4. Точка H — ортоцентр гострокутного трикутника ABC. Коло з діаметром BH удруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці K. Доведіть, що пряма KH проходить через середину сторони AC.

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

8.1. *Відповідь:* 8 замків.

Усього на діагоналях дошки є 13 клітинок. Покажемо, що принаймні у 5 з цих клітинок веж немає. Справді, якщо у кутовій клітинці дошки стоїть вежа, то її замок займає дві діагональні клітинки, а отже у сусідній з нею по діагоналі клітинці вежі немає. Аналогічно якщо у центральній клітинці дошки стоїть вежа, то у одній з чотирьох сусідніх з нею по діагоналі клітинок вежі немає. Отже, на дошці може бути не більше 8 веж, тобто не більше 8 замків. Приклад розташування 8 замків наведено на рис. 3.

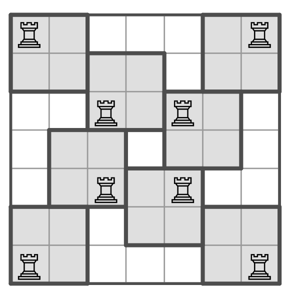


Рис. 3.

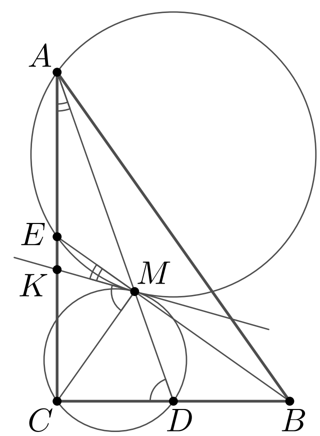


Рис. 4.

8.2. *Відповідь:* $\angle BMC = 90°$.

Нехай спільна дотична до кіл у точці M перетинає AC у точці K (рис. 4). Тоді $\angle EMC = \angle EMK + \angle KMC = \angle CAD + \angle ADC = 180° - \angle ACD = 90°$, а отже і $\angle BMC = 180° - \angle EMC = 90°$.

8.3. *Відповідь:* другий гравець.

Нехай другий гравець завжди закреслює точку, діаметрально протилежну до тієї, яку щойно закреслив перший гравець. Після 2014 ходів залишаться незакресленими чотири точки, які є кінцями двох діаметрів кола, а гра ще не завершиться, оскільки для будь-якого діаметра кола кінці будь-якого іншого діаметра знаходяться по різні сторони від нього. Після наступного ходу першого гравця залишаться кінці одного діаметра і ще одна точка, тобто по одну сторону від цього діаметра точок не залишиться та перший гравець програє.

8.4. *Відповідь:* $n = 3$.

Спільний простий дільник чисел n^2+3 та n^4+6 є дільником числа

$$n^4+6-(n^2+3)(n^2-3)=15,$$

а отже дорівнює 3 або 5. Але число n^2+3 не може ділитися на 5, тому найбільший простий дільник числа n^2+3 та найменший простий дільник числа n^4+6 це 3. Зокрема n^4+6 непарне, звідки n непарне та n^2+3 парне. Таким чином, $n^2+3=2^i3^j$, де i, j — деякі натуральні числа. Якщо $n=2k-1$, то $n^2+3=4k^2-4k+4=4k(k-1)+4$ дає остачу 4 при діленні на 8. Отже, $i=2$. Оскільки n^2+3 ділиться на 3, то n ділиться на 3 та n^2+3 дає остачу 3 при діленні на 9. Тому $j=1$, $n^2+3=12$ та $n=3$.

8.5. *Відповідь:* так.

Назвемо 5 карток з номерами $n-4, n-3, n-2, n-1, n$ особливими, а інші картки звичайними. За умовою справа від кожної особливої картки (можливо, крім найправішої картки у ряді) лежить звичайна. Якщо прибрати звичайні картки, які лежать справа від особливих, то залишиться $n-5$ або $n-4$ карток. Будемо перевертати картки по одній, рухаючись вздовж ряду зліва направо. При цьому якщо перевернута картка виявилася особливою, то наступну картку перевертати не будемо (вона точно звичайна). Коли будуть перевернуті $n-5$ карток, серед них опиняться або всі особливі картки, або всі особливі картки крім однієї, якщо найправіша картка є особливою. Тому якщо картку з числом n не буде перевернуто, то вона найправіша.

9.2. *Відповідь:* $2:1$.

Оскільки кола ω_1 та ω_2 дотикаються, то при гомотетії з центром M та коефіцієнтом -2, яка переводить точку D у точку A, коло ω_2 переходить у коло ω_1. Нехай F — образ точки C при цій гомотетії (рис. 5). Тоді $AF \parallel CD$, а отже $AF \perp AE$, та $AF = 2DC = CB$. Тому прямокутні трикутники AFC та CBA рівні. Нехай N — точка перетину кола ω_1 з AB. Тоді $\angle ANM = \angle AFM = \angle ABC$. Отже, $MN \parallel BC$ та $AN : NB = AM : MD = 2 : 1$.

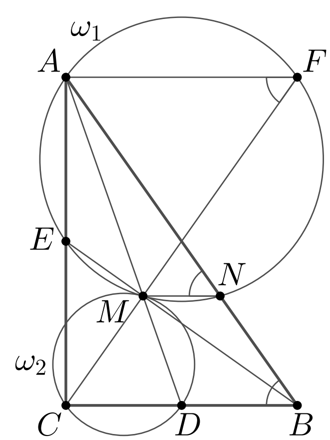


Рис. 5.

9.3. Помітимо, що

$$(x+1)^2+(y-1)^2=(x-y+1)^2+2xy+1 \geq 2xy+1$$

та за нерівністю Коші $2xy+1 \geq 2\sqrt{2xy}$.

Зауваження. Рівність досягається, якщо одночасно $x-y+1=0$ та $2xy=1$, тобто при $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

9.4. *Відповідь:* ні.

Припустимо, що такі числа існують. Тоді числа 2^a та -3^b, 3^a та -5^b, 5^a та -2^b дають однакові остачі при діленні на 29. Отже, числа $2^a \cdot 3^a \cdot 5^a = 30^a = (29+1)^a$ та $(-3^b)\cdot(-5^b)\cdot(-2^b) = -30^b = -(29+1)^b$ теж мають давати однакові остачі при діленні на 29. Проте перше з цих чисел дає остачу 1, а друге — таку ж остачу, як -1, тобто остачу 28, суперечність.

9.5. *Відповідь:* другий гравець.

Нехай довжина кола дорівнює 1. Діаметр, по одну сторону від якого немає незакреслених точок, знайдеться тоді й лише тоді, коли довжина однієї з дуг, на які точки розбивають коло, не менша за 0,5. Якщо на колі залишилося хоча б чотири точки, то знайдуться дві сусідні дуги з сумою довжин, меншою за 0,5 (справді, сума довжин дуг не може дорівнювати 0,5, бо серед точок немає діаметрально протилежних, а якщо сума довжин будь-яких двох сусідніх дуг більша за 0,5, то сума довжин будь-яких чотирьох послідовних дуг більша за 1, суперечність). Тому гравець, який робитиме хід, може закреслити спільний кінець цих сусідніх дуг і не програти цим ходом, оскільки при цьому ході утворюється дуга з довжиною, меншою за 0,5. Отже, кожен гравець може уникати програшу доти, доки на колі не залишаться лише три точки. Далі перший гравець закреслить одну з останніх трьох точок та програє.

10.2. *Відповідь:* $3:1$.

Нехай коло ω_2 вдруге перетинає AC у точці L та BE у точці P (рис. 6). При гомотетії з центром M, яка переводить коло ω_1 у коло ω_2, відрізок AE переходить у відрізок DP. Тому $DP \parallel AC$, звідки DP — середня лінія трикутника ECB, а отже $PD = \frac{1}{2}EC$. Оскільки $LC \perp CD$ та $PD \perp CD$, то вписаний чотирикутник $CDPL$ є прямокутником. Таким чином, $LC = PD = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{4}AC$, тобто $AL : LC = 3 : 1$.

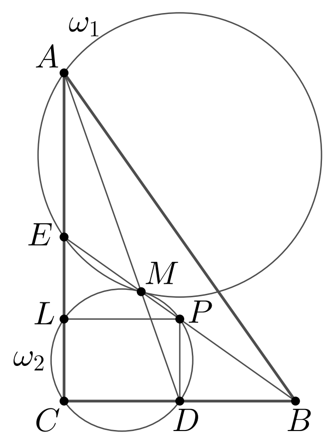


Рис. 6.

10.4. За нерівністю між середніми та нерівністю Коші

$$\sqrt{\frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \text{ та } x+y = x+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3} \geq 4\sqrt[4]{x\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{xy^3}{27}}.$$

Отже,

$$(x+1)^2+(y-1)^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot 16\sqrt{\frac{xy^3}{27}} = \frac{8y\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}.$$

Зауваження. Рівність досягається, якщо одночасно $x+1 = y-1$ та $x = \frac{y}{3}$, тобто при $x = 1$, $y = 3$.

10.5. *Відповідь:* другий гравець.

Покажемо, що виграшну стратегію має другий гравець. Проведемо через кожну з 2019 точок радіус кола та пофарбуємо його у синій колір. Також проведемо радіуси, які доповнюють сині радіуси до діаметрів, та пофарбуємо їх у червоний колір. На початку гри 2019 синіх та 2019 червоних радіусів чергуються. Коли точку закреслюють, будемо видаляти синій та червоний радіуси, які їй відповідають. Якщо перед ходом першого гравця сині та червоні радіуси чергувалися, то після його ходу з'являться рівно два сусідні червоні радіуси та навпроти них два сусідні сині радіуси. Тому якщо другий гравець закреслить кінець одного з сусідніх синіх радіусів, то сині та червоні радіуси знову стануть чергуватися. Після 2015 ходів наступний хід матиме робити другий гравець, а гра ще не завершиться. Справді, для будь-якого діаметра кола по кожну сторону від нього будуть принаймні три кольорові радіуси, серед яких є синій. Тому по обидві сторони від кожного діаметра є незакреслені точки. Чотири останні незакреслені точки розбивають коло на чотири дуги. Серед них знайдуться дві сусідні дуги з сумою довжин, не меншою (насправді, більшою) за половину довжини кола, бо інакше сума довжин чотирьох дуг є меншою за довжину кола, суперечність. Другий гравець закреслить спільний кінець цих дуг та виграє.

Усна математична олімпіада

1. *Відповідь:* $n = 3$.

Числа n та $n + 1$ не мають спільних простих дільників, тому $P(n) \neq P(n + 1)$, а отже $\left[\sqrt{n}\right] \neq \left[\sqrt{n+1}\right]$. Звідси $n + 1$ — точний квадрат, $\left[\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n}\right] + 1$ та $P(n) = P(n + 1) + 1$. Але $P(n)$ та $P(n + 1)$ — прості числа, тому остання рівність можлива лише при $P(n) = 3$ та $P(n + 1) = 2$.

Таким чином, n непарне, $n = 3^a$ та $n+1 = 2^b$, де $a, b \in \mathbb{N}$. Оскільки $n+1$ — точний квадрат, то b парне. Покладемо $b = 2c$. Тоді $3^a = 2^{2c} - 1 = (2^c - 1)(2^c + 1)$. Числа $2^c - 1$ та $2^c + 1$ не можуть одночасно ділитися на 3, тому $2^c - 1 = 1$, $c = 1$ та $n = 3$. Залишається зробити перевірку.

2. *Відповідь:* 25 ходів.

Пофарбуємо другий і четвертий рядки дошки. Кожен короткий хід коня з'єднує пофарбовану та непофарбовану клітинки, причому пофарбовані клітинки для різних коротких ходів є різними. Тому коротких ходів може бути щонайбільше 12, оскільки на дошці є 12 пофарбованих клітинок. Оскільки нормальні та короткі ходи чергуються, кінь може зробити не більше 13 нормальних ходів, а всього — не більше 25 ходів. На рис. 7 показано, як можна зробити 25 ходів (зображено початкове положення коня та його положення після 1-го, 2-го, ..., 25-го ходів).

18	4	6	8	10	
3	17	19	5	7	9
	♘		20	25	11
16	2	23	14	12	21
1	15	13	24	22	

Рис. 7.

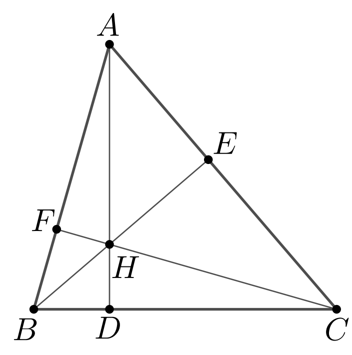


Рис. 8.

3. Позначимо $AB = c$, $AC = b$ та $BC = a$. Прямокутні трикутники ABD та AHF подібні (рис. 8), тому $AB/AD = AH/AF$, а отже $AH \cdot AD = AB \cdot AF = c \cdot b \cos A$. За теоремою косинусів $2AH \cdot AD = 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$. Аналогічно дістаємо $2BH \cdot BE = a^2 + c^2 - b^2$ та $2CH \cdot CF = a^2 + b^2 - c^2$. Отже,

$$2(AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF) = (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) = \\ = a^2 + b^2 + c^2 \geq cb + ac + ba = AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB.$$

4. Покладемо $p_0 = 1$ та $p_k = (1+a_1)\dots(1+a_k)$, $1 \le k \le n$. При кожному $1 \le k \le n$ маємо

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)} = \frac{a_k}{p_k} = \frac{1+a_k}{p_k} - \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{p_k}.$$

Тому ліва частина нерівності, яку слід довести, дорівнює

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n}.$$

А оскільки $p_n = (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \ge 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n$, то

$$1 - \frac{1}{p_n} \ge 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n},$$

що завершує доведення.

5. *Відповідь:* $2 \cdot 3^n - 2^n$.
Очевидно, що жодна чорна клітинка верхнього рядка не може бути особливою, бо над нею немає білої клітинки. Якщо всі клітинки нижнього рядка є чорними, то серед них немає особливих, а клітинка над кожною з них може бути білою або чорною. У цьому випадку дістаємо 2^n таблиць. Нехай тепер у нижньому рядку біла клітинка вперше з'являється на k-му зліва місці, де $1 \le k \le n$. Тоді перші k зліва клітинок у верхньому рядку можуть мати будь-які кольори, а для кожного з $n-k$ найправіших стовпчиків (при $k < n$) можливі 3 варіанти розфарбування (забороненим є лише варіант, коли нижня клітинка чорна, а клітинка над нею біла). Отже, дістаємо $2^k \cdot 3^{n-k}$ таблиць, а загальна кількість таблиць без особливих чорних клітинок дорівнює

$$2^n + \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot 3^{n-k} = 2^n + 3^n \cdot \sum_{k=1}^{n} (2/3)^k = 2^n + 3^n \cdot \frac{(2/3)^{n+1} - 2/3}{2/3 - 1} = 2 \cdot 3^n - 2^n.$$

6. Позначимо $d(n) = f(f(n))$ кількість дільників числа n. Зауважимо, що $d(2) = 2$ та $2 \le d(n) < n$ для всіх $n > 2$.

Покажемо, що існують натуральні числа $x \ge 2$, $y \ge 2$, для яких $f(x) = y$. Справді, оскільки $f(f(6)) = 4 \ne f(f(25)) = 3$, то $f(6) \ne f(25)$. Отже, виконується принаймні одна з нерівностей $f(6) \ge 2$ та $f(25) \ge 2$. Розглянемо деяку пару натуральних чисел $a \ge 2$, $b \ge 2$, для якої $f(a) = b$ та сума $a + b$ є найменшою можливою. Тоді $d(a) \ge 2$, $d(b) \ge 2$ та $f(d(a)) = f(f(f(a))) = f(f(b)) = d(b)$. При цьому якщо $a > 2$ або $b > 2$, то $d(a) + d(b) < a + b$ та дістаємо суперечність з вибором чисел a, b. Таким чином, $a = b = 2$ та $f(2) = 2$.

Нехай тепер p — просте число. Тоді $d(f(p)) = f(f(f(p))) = f(d(p)) = f(2) = 2$, а отже $f(p)$ — теж просте число.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* тих, які не можна подати як добуток двох трицифрових чисел.
Існує 900 трицифрових чисел (від 100 до 999). Тому існує 900 квадратів трицифрових

чисел та $900 \cdot 899/2 < 900^2/2 = 405\,000$ добутків різних трицифрових чисел. Отже, існує не більше $405\,900$ шестицифрових чисел, які є добутками двох трицифрових чисел. А всього шестицифрових чисел $900\,000$. Отже, більше половини з них не можна подати як добуток двох трицифрових.

1.2. Позначимо A, B, C вершини даного трикутника, A_1, B_1, C_1 — середини його сторін, A_2, B_2, C_2 — три інші вершини шестикутника, що розглядається у задачі, O — центр описаного кола трикутника ABC (рис. 9). Зауважимо, що $OA_1C_2B_1$ — паралелограм (справді, оскільки $OA_1 \perp BC$ та $B_1C_2 \perp BC$, то $OA_1 \parallel B_1C_2$, аналогічно $OB_1 \parallel A_1C_2$), аналогічно $OB_1A_2C_1$ та $OC_1B_2A_1$ — паралелограми. Площі паралелограмів $OA_1C_2B_1$, $OB_1A_2C_1$ та $OC_1B_2A_1$ вдвічі більші за площі трикутників OA_1B_1, OB_1C_1 та OC_1A_1 відповідно, тому площа шестикутника $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ вдвічі більша за площу трикутника $A_1B_1C_1$, яка дорівнює чверті площі трикутника ABC.

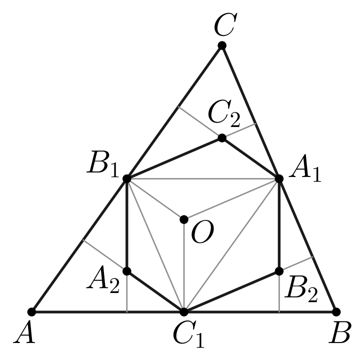


Рис. 9.

1.3. *Відповідь:* $x = 1009/505$, $y = 1010$.
Оскільки $[x]|y| > 0$, то $[x] > 0$, а отже $x \geq [x] \geq 1$. Тепер зрозуміло, що $y > 0$, бо $x[y] > 0$. Тоді

$$y = \frac{1010}{[x]} \geq [y] = \frac{2018}{x} > \frac{2018}{[x]+1},$$

тобто

$$1010([x]+1) > 2018[x],$$

звідки $[x] < \frac{1010}{1008} < 2$. Таким чином, $[x] = 1$. Тоді $y = 1010$ та $x = \frac{2018}{y} = \frac{1009}{505}$.

1.4. *Відповідь:* $k = 64/3$.
При $a = b$ маємо $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{3a^3} + \dfrac{1}{3a^3} \geq \dfrac{k}{8a^3}$, звідки $k \leq \dfrac{64}{3}$. Доведемо, що

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{3a^2b} + \frac{1}{3ab^2} \geq \frac{64}{3(a+b)^3} \quad \text{при всіх } a, b > 0.$$

Справді, за нерівністю Коші $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ та

$$\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{3\sqrt{a^3b^3}} = \frac{8}{3\left(\sqrt{ab}\right)^3} = \frac{64}{3\left(2\sqrt{ab}\right)^3} \geq \frac{64}{3(a+b)^3}.$$

2.1. *Відповідь:* (3; 1), (3; 2), (1; 3), (2; 3).
Число m є коренем квадратного рівняння $m^2 - mn + n^2 - 7 = 0$. Дискримінант цього рівняння $D = n^2 - 4(n^2 - 7) = 28 - 3n^2$ є від'ємним при всіх $n \geq 4$. Залишається при $n = 1, 2, 3$ знайти натуральні корені квадратних рівнянь $m^2 - m - 6 = 0$, $m^2 - 2m - 3 = 0$, $m^2 - 3m + 2 = 0$ відповідно.

2.2. Оскільки $\angle QAE = \angle QBE = 45°$ і точки A, B лежать по один бік від QE, то навколо чотирикутника $ABEQ$ можна описати коло (рис. 10). Таким чином, $\angle AQE = 180° - \angle ABE = 90°$, тобто трикутник AQE — прямокутний рівнобедрений та $AE = \sqrt{2}AQ$. Аналогічно $AF = \sqrt{2}AP$. Звідси випливає, що трикутники AEF і APQ подібні з коефіцієнтом подібності $\sqrt{2}$, а отже $S_{AEF} = 2S_{APQ}$.

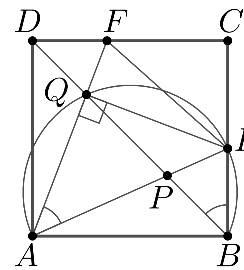


Рис. 10.

2.3. Зауважимо, що на кожній виставі кількість пар друзів, які сидять поруч, дорівнює $n - 1$, а усього є $\frac{n(n-1)}{2}$ пар друзів. Звідси випливає, що друзі відвідали $\frac{n(n-1)}{2} : (n - 1) = \frac{n}{2}$ вистав, а отже n парне.

2.4. *Відповідь:* існують.
Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ — будь-які попарно різні натуральні числа, серед яких непарна кількість непарних. Сума квадратів цих чисел — деяке непарне число $2n + 1$. Покладемо $x_{2018} = n$ та $x_{2019} = n + 1$. Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2017}^2 = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2 = x_{2019}^2 - x_{2018}^2.$$

Залишається зауважити, що кожне з чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ менше за n, оскільки ці числа менші за $\sqrt{2n + 1}$ та $\sqrt{2n + 1} < n$ при $n > 2$.

3.1. *Відповідь:* 1.
Покладемо $a = x + y$, $b = xy$. Тоді умова $x^2 + xy + y^2 = x + y$ набуває вигляду $a^2 - b = a$, звідки $b = a^2 - a$. Тому

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b = a^2 - 2(a^2 - a) = -a^2 + 2a = 1 - (a - 1)^2 \leq 1.$$

Рівність досягається, наприклад, при $x = 1$, $y = 0$.

3.2. *Відповідь:* ні.
Оскільки $1\,004\,041 = 10^6 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10 + 1$, то при $x = 10$ маємо

$$\begin{aligned} 1\,004\,041 =& x^6 + 4x^3 + 4x + 1 = (x^6 + 1) + 4x(x^2 + 1) = \\ =& (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) + 4x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 4x + 1) = 101 \cdot 9941. \end{aligned}$$

3.3. Нехай $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — різниці прогресій. Припустимо, що у кожній з прогресій перший член не ділиться на її різницю. Але якщо перший член прогресії з різницею d не ділиться на d, то всі члени цієї прогресії не діляться на d. Тому число $d_1 d_2 \ldots d_n$ не може належати жодній прогресії, суперечність.

3.4. Нехай пряма KH вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці D (рис. 11). Тоді $\angle BKD = \angle BKH = 90°$, отже BD — діаметр описаного кола трикутника ABC. Тому $CD \perp BC$, $CA \perp BA$. Оскільки також $AH \perp BC$ та $CH \perp BA$, то $CD \parallel AH$, $AD \parallel CH$. Таким чином, $AHCD$ паралелограм, а пряма KH, яка містить його діагональ HD, проходить через середину діагоналі AC.

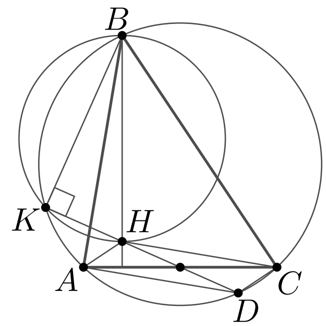


Рис. 11.