Вісімнадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. Кетяг бузку складається із квіток з 4 або 5 пелюстками. Кількість квіток та загальна кількість пелюсток є повними квадратами. Чи може кількість квіток з 4 пелюстками ділитися на кількість квіток з 5 пелюстками?

2. У турнірі брали участь $n \geq 2$ команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. За поразку команда отримує 0 очок, а за перемогу — стільки очок, скільки у неї до цього було поразок. При яких n всі команди могли набрати однакову кількість очок?

3. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник, в якому $\angle BAC = 120°$, D — середина BC, DE — висота трикутника ADC, M — середина DE. Довести, що $BM = 3AM$.

4. По колу стоять 99 гномів, деякі з них носять капелюхи. Жодні гноми у капелюхах не стоять поряд та між жодними гномами у капелюхах не стоїть рівно 48 гномів. Якою є найбільша можлива кількість гномів у капелюхах?

5. Чи можна заповнити клітинки таблиці розміру 2019×2019 попарно різними натуральними числами так, що у кожному прямокутнику розміру 1×2 або 2×1 більше число ділиться на менше, а відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого не перевищує 2019^4?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Восемнадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. Гроздь сирени состоит из цветков с 4 или 5 лепестками. Количество цветков и общее количество лепестков являются полными квадратами. Может ли количество цветков с 4 лепестками делиться на количество цветков с 5 лепестками?

2. В турнире принимали участие $n \geq 2$ команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. За поражение команда получает 0 очков, а за победу — столько очков, сколько у неё до этого было поражений. При каких n все команды могли набрать одинаковое количество очков?

3. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором $\angle BAC = 120°$, D — середина BC, DE — высота треугольника ADC, M — середина DE. Доказать, что $BM = 3AM$.

4. По кругу стоят 99 гномов, некоторые из них носят шляпы. Никакие гномы в шляпах не стоят рядом и между никакими гномами в шляпах не стоит ровно 48 гномов. Каково наибольшее возможное количество гномов в шляпах?

5. Можно ли заполнить клетки таблицы размера 2019×2019 попарно разными натуральными числами так, что в каждом прямоугольнике размера 1×2 или 2×1 большее число делится на меньшее, а отношение наибольшего числа в таблице к наименьшему не превышает 2019^4?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eighteenth Kyiv mathematical festival
8-th form

1. A bunch of lilac consists of flowers with 4 or 5 petals. The number of flowers and the total number of petals are perfect squares. Can the number of flowers with 4 petals be divisible by the number of flowers with 5 petals?

2. There were $n \geq 2$ teams in a tournament. Each team played against every other team once without draws. A team gets 0 points for a loss and gets as many points for a win as its current number of losses. For which n all the teams could end up with the same number of points?

3. Let ABC be an isosceles triangle in which $\angle BAC = 120°$, D be the midpoint of BC, DE be the altitude of triangle ADC, and M be the midpoint of DE. Prove that $BM = 3AM$.

4. 99 dwarfs stand in a circle, some of them wear hats. There are no adjacent dwarfs in hats and no dwarfs in hats with exactly 48 dwarfs standing between them. What is the maximal possible number of dwarfs in hats?

5. Is it possible to fill the cells of a table of size 2019×2019 with pairwise distinct positive integers in such a way that in each rectangle of size 1×2 or 2×1 the larger number is divisible by the smaller one, and the ratio of the largest number in the table to the smallest one is at most 2019^4?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Вісімнадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Кетяг бузку складається із квіток з 4 або 5 пелюстками. Кількість квіток та загальна кількість пелюсток є повними квадратами. Чи може кількість квіток з 4 пелюстками ділитися на кількість квіток з 5 пелюстками?

2. У турнірі брали участь $n \geq 2$ команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. За поразку команда отримує 0 очок, а за перемогу — стільки очок, скільки у неї до цього було поразок. При яких n всі команди могли набрати однакову кількість очок?

3. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $a + b + c \geq 3$. Довести, що $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

4. Нехай D — середина основи BC рівнобедреного трикутника ABC, E — точка на стороні AC така, що $\angle CDE = 60°$, M — середина DE. Довести, що $\angle AME = \angle BMD$.

5. Чи можна заповнити клітинки таблиці розміру 2019×2019 попарно різними натуральними числами так, що у кожному прямокутнику розміру 1×2 або 2×1 більше число ділиться на менше, а відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого не перевищує 2019^4?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Восемнадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Гроздь сирени состоит из цветков с 4 или 5 лепестками. Количество цветков и общее количество лепестков являются полными квадратами. Может ли количество цветков с 4 лепестками делиться на количество цветков с 5 лепестками?

2. В турнире принимали участие $n \geq 2$ команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. За поражение команда получает 0 очков, а за победу — столько очков, сколько у неё до этого было поражений. При каких n все команды могли набрать одинаковое количество очков?

3. Пусть $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c \geq 3$. Доказать, что $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

4. Пусть D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC, E — точка на стороне AC такая, что $\angle CDE = 60°$, M — середина DE. Доказать, что $\angle AME = \angle BMD$.

5. Можно ли заполнить клетки таблицы размера 2019×2019 попарно разными натуральными числами так, что в каждом прямоугольнике размера 1×2 или 2×1 большее число делится на меньшее, а отношение наибольшего числа в таблице к наименьшему не превышает 2019^4?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eighteenth Kyiv mathematical festival
9-th form

1. A bunch of lilac consists of flowers with 4 or 5 petals. The number of flowers and the total number of petals are perfect squares. Can the number of flowers with 4 petals be divisible by the number of flowers with 5 petals?

2. There were $n \geq 2$ teams in a tournament. Each team played against every other team once without draws. A team gets 0 points for a loss and gets as many points for a win as its current number of losses. For which n all the teams could end up with the same number of points?

3. Let $a, b, c \geq 0$ and $a + b + c \geq 3$. Prove that $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

4. Let D be the midpoint of the base BC of an isosceles triangle ABC, E be the point at the side AC such that $\angle CDE = 60°$, and M be the midpoint of DE. Prove that $\angle AME = \angle BMD$.

5. Is it possible to fill the cells of a table of size 2019×2019 with pairwise distinct positive integers in such a way that in each rectangle of size 1×2 or 2×1 the larger number is divisible by the smaller one, and the ratio of the largest number in the table to the smallest one is at most 2019^4?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Вісімнадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. Кетяг бузку складається із квіток з 4 або 5 пелюстками. Кількість квіток та загальна кількість пелюсток є повними квадратами. Чи може кількість квіток з 4 пелюстками ділитися на кількість квіток з 5 пелюстками?

2. Нехай $a, b, c > 0$ та $abc \geq 1$. Довести, що $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

3. У турнірі брали участь $2n$, $n \geq 2$, команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. За поразку команда отримує 0 очок, а за перемогу — стільки очок, скільки у неї до цього було поразок. При яких n всі команди могли набрати однакову ненульову кількість очок?

4. Нехай D — середина основи BC рівнобедреного трикутника ABC, E — точка на стороні AC така, що $\angle CDE = 60°$, M — середина DE. Довести, що $\angle AME = \angle BMD$.

5. Чи можна заповнити клітинки таблиці розміру 2019×2019 попарно різними натуральними числами так, що у кожному прямокутнику розміру 1×2 або 2×1 більше число ділиться на менше, а відношення найбільшого числа у таблиці до найменшого не перевищує 2019?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Восемнадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. Гроздь сирени состоит из цветков с 4 или 5 лепестками. Количество цветков и общее количество лепестков являются полными квадратами. Может ли количество цветков с 4 лепестками делиться на количество цветков с 5 лепестками?

2. Пусть $a, b, c > 0$ и $abc \geq 1$. Доказать, что $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

3. В турнире принимали участие $2n$, $n \geq 2$, команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. За поражение команда получает 0 очков, а за победу — столько очков, сколько у неё до этого было поражений. При каких n все команды могли набрать одинаковое ненулевое количество очков?

4. Пусть D — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC, E — точка на стороне AC такая, что $\angle CDE = 60°$, M — середина DE. Доказать, что $\angle AME = \angle BMD$.

5. Можно ли заполнить клетки таблицы размера 2019×2019 попарно разными натуральными числами так, что в каждом прямоугольнике размера 1×2 или 2×1 большее число делится на меньшее, а отношение наибольшего числа в таблице к наименьшему не превышает 2019?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eighteenth Kyiv mathematical festival
10-th form

1. A bunch of lilac consists of flowers with 4 or 5 petals. The number of flowers and the total number of petals are perfect squares. Can the number of flowers with 4 petals be divisible by the number of flowers with 5 petals?

2. Let $a, b, c > 0$ and $abc \geq 1$. Prove that $a^4 + b^3 + c^2 \geq a^3 + b^2 + c$.

3. There were $2n$, $n \geq 2$, teams in a tournament. Each team played against every other team once without draws. A team gets 0 points for a loss and gets as many points for a win as its current number of losses. For which n all the teams could end up with the same number of points?

4. Let D be the midpoint of the base BC of an isosceles triangle ABC, E be the point at the side AC such that $\angle CDE = 60°$, and M be the midpoint of DE. Prove that $\angle AME = \angle BMD$.

5. Is it possible to fill the cells of a table of size 2019×2019 with pairwise distinct positive integers in such a way that in each rectangle of size 1×2 or 2×1 the larger number is divisible by the smaller one, and the ratio of the largest number in the table to the smallest one is at most 2019?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.