Шістнадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

З 6 по 9 травня цього року відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8–10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у студентському військово-спортивному таборі "Сосновий" у місті Українка.

Цього року у фестивалі взяли участь команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Львівського фізико-математичного ліцею, фізико-математичної гімназії № 17 (м. Вінниця), фізико-математичної школи № 42 ім. академіка І. Векуа (м. Тбілісі, Грузія), київські команди Українського фізико-математичного ліцею, Русанівського ліцею, ліцею "Наукова зміна", гімназії № 34 "Либідь" ім. В. Максименка, Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер", а також дві збірні команди: ліцею № 208, Новопечерської школи і природничо-наукового ліцею № 145 (всі — м. Київ) та природничо-наукового ліцею № 145 (м. Київ) і школи № 1329 (м. Москва, Росія).

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці усної олімпіади (10 клас)

I місце: Арсеній Ніколаєв (ПНЛ № 145), Володимир Фединяк (ЛФМЛ, 9 клас).

II місце: Михайло Бондаренко ("Лідер"), Михайло Білокур (ПНЛ № 145), Матвій Катаєв (школа № 1329, Москва), Олег Кондратенко (УФМЛ).

III місце: Дем'ян Банах (ЛФМЛ), Кирило Баркалов (ХФМЛ №27), Григорій Назаренко (ХФМЛ №27), Микита Шапран (АГ №45, Харків), Катерина Яцків ("Лідер").

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Юрій Гладков (ХФМЛ №27).

II місце: Олексій Масалітін (ХФМЛ №27), Богдан Гангало ("Лідер").

III місце: Аліса Баклан (УФМЛ), Арсен Дойничко ("Лідер"), Ольга Жур ("Лідер"), Кліментій Золотарьов (ХФМЛ №27), Ілля Лазуренко (ХФМЛ №27), Антон Лисойван (АГ №45, Харків), Михайло Пасічник (ЛФМЛ), Захар Наумець ("Лідер", 7 клас), Максим Обозний (АГ №45, Харків), Михайло Штанденко ("Лідер").

[1] механіко-математичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка

[2] Інститут математики НАН України

9 клас

I місце: Костянтин Луценко (УФМЛ), Вадим Коваль (УФМЛ), Єгор Панченко ("Наукова зміна").

II місце: Володимир Фединяк (ЛФМЛ), Олеся Білик (ПНЛ № 145), Катерина Горох (ПНЛ № 145), Карина Нечипорук (ліцей № 208), Дмитро Тарасюк (УФМЛ), Валерій Філінюк ("Лідер"), Влада Петрусенко (Новопечерська школа), Олексій Рожков (ХФМЛ №27).

III місце: Юр-Любомисл Дехтяр ("Наукова зміна"), Олена Кісленко (ліцей № 208), Антон Москальков ("Лідер"), Максим Процик (ЛФМЛ), Анастасія Руденко ("Лідер"), Наталія Хонон ("Лідер"), Михайло Цисін ("Лідер"), Владислав Шашков ("Лідер"), Микита Олексієнко ("Лідер"), Ніка Салія (ФМШ № 42, Тбілісі, Грузія), Михайло Швець (ФМГ № 17, Вінниця).

10 клас

I місце: Арсеній Ніколаєв (ПНЛ № 145).

II місце: Михайло Білокур (ПНЛ № 145), Матвій Катаєв (школа № 1329, Москва), Олег Кондратенко (УФМЛ).

III місце: Олексій Колупаєв (ХФМЛ №27), Віталій Папка (ЛФМЛ), Артем Ніколаєв (ХФМЛ №27), Михайло Бондаренко ("Лідер").

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Декілька гномів стояли у ряд, а потім стали у ряд в іншому порядку. Чи може виявитися, що рівно у третини гномів залишилися обидва старі сусіди, а рівно у третини гномів залишився лише один старий сусід, якщо гномів було а) 6; б) 9?

2. Дано трикутник ABC. На продовженні AB за точку A відмітили точку D так, що $AD = BC$, а на продовженні BC за точку B відмітили точку E так, що $BE = AC$. Довести, що описане коло трикутника DEB проходить через центр вписаного кола трикутника ABC.

3. Кожну клітинку таблиці 7×7 пофарбували в один з декількох кольорів. Відомо, що для фарбування будь-яких двох різних рядків використали різну кількість кольорів та для фарбування будь-яких двох різних стовпчиків використали різну кількість кольорів. При якій найбільшій кількості кольорів у таблиці це можливо?

4. Двоє гравців по черзі кладуть дві або три монети кожен у свій капелюх (до початку гри капелюхи порожні). Кожного разу, коли обидва гравці зробили по п'ять ходів, вони обмінюються капелюхами. Виграє гравець, після ходу якого в його капелюсі стане сто або більше монет. Хто з гравців має виграшну стратегію?

5. Знайти всі пари цілих чисел (x, y), для яких $(x^2 + y)(y^2 + x) = (x + 1)(y + 1)$.

9 клас

1. Див. задачу 8.1.

2. Див. задачу 8.3.

3. На хорді AB кола ω відмітили точку C. Нехай D — середина AC, O — центр кола ω. Описане навколо трикутника BOD коло вдруге перетинає коло ω у точці E та пряму OC у точці F. Довести, що описане коло трикутника CEF дотикається до AB.
4. Про дійсні числа x, y відомо, що $x^2 \geq y$ та $y^2 \geq x$. Довести, що $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1$.

5. Двоє гравців по черзі кладуть дві або три монети кожен у свій капелюх (до початку гри капелюхи порожні). Кожного разу, коли другий гравець повторив хід першого гравця, вони обмінюються капелюхами. Виграє гравець, після ходу якого в його капелюсі стане сто або більше монет. Хто з гравців має виграшну стратегію?

10 клас

1. Декілька гномів стояли у ряд, а потім стали у ряд в іншому порядку. Чи може виявитися, що рівно у третини гномів з'явилися двоє нових сусідів, а рівно у третини гномів з'явився лише один новий сусід, якщо гномів було а) 9; б) 12?
2. Див. задачу 9.4.
3. Див. задачу 9.3.
4. Див. задачу 9.5.
5. На площині дано трикутник ABC, усі вершини якого мають цілі координати. Чи обов'язково існує пряма, яка перетинає прямі AB, BC та AC у трьох різних точках з цілими координатами?

Автори задач: В. Брайман (8.1=9.1∼10.1, 8.2, 8.5, 9.3=10.3, 9.4=10.2, 10.5), О. Руденко (8.3=9.2, 8.4∼9.5=10.4).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. До шахового клубу входять рівно 100 шахістів. Кожен з них зіграв рівно з 56 іншими членами клубу. Відомо, що в клубі є рівно 50 першорозрядників, причому всі вони грали один з одним. Доведіть, що весь клуб можна поділити на дві групи так, що в кожній групі кожні двоє осіб грали між собою.
2. Додатні дійсні числа a, b, c і d задовольняють рівності $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc$ та $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\frac{ab+cd}{ad+bc}$.
3. Вершини прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90°$), вписаного в коло, ділять його на три дуги. До кожної з трьох дуг провели дотичну таким чином, що точка її дотику є серединою відрізка дотичної, який відтинається прямими AB і AC. Доведіть, що трикутник, вершини якого є означеними точками дотику, є рівностороннім.
4. Назвемо число A *підчислом* натурального числа B, якщо у десятковому записі числа B деяка кількість послідовних цифр утворює число A. (Наприклад, числа 2, 171 і 7132 є підчислами числа 56 171 325.) Доведіть, що існує натуральне число N таке, що для всіх натуральних чисел $a > N$ існує підчисло числа a, яке ділиться на 2017.
5. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що многочлен $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ є константою.
6. Послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є перестановкою чисел $1, 2, \ldots, n$. Для яких натуральних n може статися так, що числа 0, a_1, $a_1 + a_2$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ всі дають різні остачі при діленні на $n+1$?

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[3]

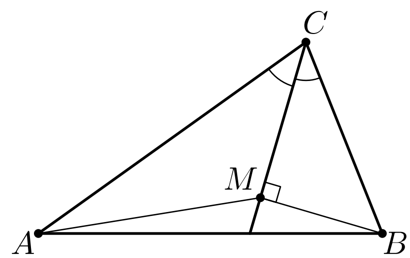

Рис. 1.

1.1. Укажіть таке натуральне число, що добуток усіх його натуральних дільників (включаючи 1 і саме число) закінчується рівно 2017 нулями.

1.2. У чотирикутнику довжини всіх сторін і діагоналей менші за 4 см. Доведіть, що цей чотирикутник можна помістити в круг радіуса 3 см.

1.3. Площа трикутника ABC дорівнює 1. З вершини B опустили перпендикуляр BM на бісектрису кута C (див. рис. 1). Знайдіть площу трикутника AMC.

1.4. Чи існує така послідовність $\{a_n\}$, яка складається з 2017 різних натуральних чисел, що для будь-яких двох її послідовних членів a_k і a_{k+1} сума $a_k^2+a_{k+1}^2$ є квадратом натурального числа?

2 тур

2.1. Знайдіть всі натуральні степені числа 2 такі, що при викреслюванні першої цифри їх десяткового запису знову утворюється степінь числа 2.

2.2. На стороні BC ромба $ABCD$ позначили точку P. Коло, описане навколо трикутника ABP, перетинає пряму BD у точці Q. Коло, описане навколо трикутника CPQ, перетинає пряму BD у точці R. Доведіть, що точки A, P і R лежать на одній прямій.

2.3. Коли кожне з n чисел збільшили на 1, сума їх квадратів не змінилася. Після того, як отримані числа знову збільшили на 1, сума їх квадратів збільшилася на 1000. Знайдіть n.

2.4. Знайдіть всі натуральні числа $n > 1$ такі, що для будь-яких чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, які задовольняють рівність $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, виконується рівність

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = nx_1x_2\ldots x_n.$$

3 тур

3.1. Доведіть, що у будь-якому описаному навколо кола многокутнику знайдуться три сторони, з яких можна скласти трикутник.

3.2. Однією операцією до числа можна додати 9 або закреслити в його записі цифру 1. Якщо закреслена перша цифра, а за нею йде деяка кількість нулів, то ці нулі теж закреслюються.

а) Як, використовуючи ці операції, з числа 2017 отримати число 2018?

б) Чи з будь-якого натурального числа n можна отримати число $n+1$?

3.3. Знайдіть всі такі пари чисел x і y, для яких виконується нерівність

$$y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \leq 3xy.$$

3.4. Чи існує така нескінченна послідовність $\{a_n\}$ натуральних чисел, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ рівняння $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ має розв'язок?

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

[3] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

Розв'язки та вказівки.
Олімпіада

8.1. *Відповідь:* а) так; б) ні.
а) Занумеруємо гномів. Умова виконується, наприклад, якщо спочатку гноми стояли у порядку $1, 2, 3, 4, 5, 6$, а потім у порядку $6, 2, 3, 4, 5, 1$. б) Якщо деякі двоє гномів були та залишилися сусідами, то кожен з них є старим сусідом іншого. Тому загальна кількість старих сусідів усіх гномів є парною. Але якщо гномів 9, то ця кількість має дорівнювати 9, суперечність.

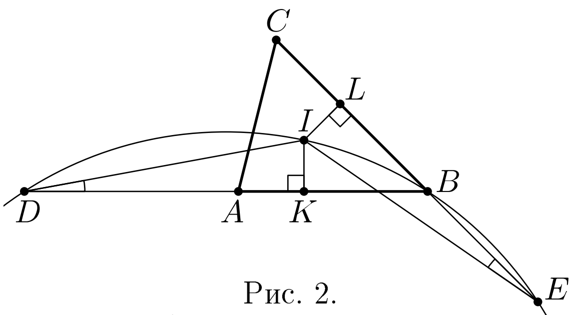

Рис. 2.

Зауваження. Неважко показати, що описана в умові задачі ситуація для $3n$ гномів можлива тоді й лише тоді, коли n парне.

8.2. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K та L — точки дотику цього кола зі сторонами AB та BC (рис. 2). Тоді $DK = DA + AK = BC + \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$. Аналогічно $EL = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$. Оскільки $DK = EL$ та $IK = IL$, то прямокутні трикутники IDK та IEL рівні. Звідси $\angle IDB = \angle IEB$, а отже точки D, I, B, E лежать на одному колі.

8.3. *Відповідь:* 22 кольори.
У рядках таблиці може бути від 1 до 7 кольорів, тому кожен з цих варіантів зустрічається по одному разу. Аналогічно у стовпчиках таблиці по одному разу зустрічаються від 1 до 7 кольорів. Розглянемо рядок, у якому є лише один колір. Колір цього рядка зустрічається в усіх стовпчиках. Крім нього у стовпчиках, де є $1, 2, \ldots, 7$ кольорів, є клітинки ще $0, 1, \ldots, 6$ інших кольорів. Отже, у таблиці не більше за $1 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 6 = 22$ кольорів. Розглянемо тепер таблицю, в якій на одній діагоналі та над нею всі клітинки пофарбовані в один колір, а під цією діагоналлю всі клітинки пофарбовані в інші кольори, що не повторюються. Ця таблиця задовольняє умову та містить клітинки 22 кольорів.

8.4. Покажемо, що виграшну стратегію має перший гравець. Для зручності будемо вважати, що до початку гри першому гравцю належав білий, а другому гравцю — чорний капелюх. Нехай перший гравець завжди кладе у білий капелюх дві монети, а у чорний капелюх — не таку кількість монет, яку другий гравець поклав у цей капелюх на п'ять ходів раніше. Тоді щоразу, коли обидва гравці зробили по десять ходів, у чорний капелюх додається рівно 25 монет, а у білий — не більше за 25 монет. Після того, як перший гравець зробить 40 ходів, у його капелюсі (чорному) буде рівно 100 монет, а у другого гравця, який встиг зробити лише 39 ходів, у капелюсі (білому) буде не більше за 97 монет. Отже, перший гравець виграє.

8.5. *Відповідь:* $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.
При $x = -1$ рівняння набуває вигляду $(1 + y)(y^2 - 1) = 0$, звідки $y = \pm 1$. Аналогічно якщо $y = -1$, то $x = \pm 1$. Надалі будемо вважати, що $x + 1 \neq 0$ та $y + 1 \neq 0$. Нехай

$d = \text{НСД}(x+1, y+1)$. Оскільки

$$\text{НСД}\big(x^2+y, x+1\big) = \text{НСД}\big(x^2+y-(x-1)(x+1), x+1\big) = \text{НСД}\big(y+1, x+1\big) = d,$$

то x^2+y ділиться на d, а цілі числа $\frac{x^2+y}{d}$ та $\frac{x+1}{d}$ взаємно прості. Аналогічно y^2+x ділиться на d, а цілі числа $\frac{y^2+x}{d}$ та $\frac{y+1}{d}$ взаємно прості. Тому з рівності

$$\tfrac{x^2+y}{d} \cdot \tfrac{y^2+x}{d} = \tfrac{x+1}{d} \cdot \tfrac{y+1}{d}$$

дістаємо, що $\frac{x^2+y}{d}$ ділиться на $\frac{y+1}{d}$ та $\frac{y^2+x}{d}$ ділиться на $\frac{x+1}{d}$. Таким чином, ця рівність можлива лише у двох випадках: при $\frac{x^2+y}{d} = \frac{y+1}{d}$ та $\frac{y^2+x}{d} = \frac{x+1}{d}$ або при $\frac{x^2+y}{d} = -\frac{y+1}{d}$ та $\frac{y^2+x}{d} = -\frac{x+1}{d}$. У першому випадку $x^2 = 1$ та $y^2 = 1$, звідки $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$, а у другому випадку $x^2+2y+1 = 0$ та $y^2+2x+1 = 0$, звідки $(x+1)^2+(y+1)^2 = 1$ та $x = y = -1$. Всі пари чисел $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ задовольняють рівняння.

9.3. Оскільки (рис. 3)

$$\angle EDB = \angle EOB = 2\angle EAB$$

та $\angle EDB = \angle EAB + \angle DEA$, то $\angle DEA = \angle EAB$. Таким чином, трикутник DAE рівнобедрений та $DE = AD = DC$. Тоді трикутники EDC та EOB рівнобедрені з рівними кутами при вершині, отже кути при основі цих трикутників теж рівні. Тому

$$\angle DCE = \angle OBE = \angle OFE,$$

а отже AC — дотична до описаного кола трикутника CEF.

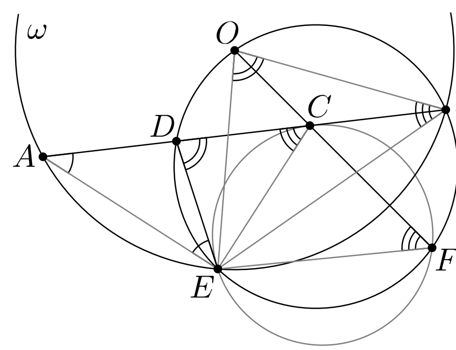

Рис. 3.

9.4. *I спосіб.* Якщо $x \le 0$, то $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \le \frac{y}{x^2+1} \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$. При $y \le 0$ нерівність доводиться аналогічно. Надалі будемо вважати, що $x, y > 0$. Тоді $x^4 \ge y^2 \ge x$, звідки $x \ge 1$, та аналогічно $y \ge 1$. Покажемо, що $\frac{x}{y^2+1} \le \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Справді, при $x \ge 1$ ця нерівність рівносильна $x^2+y^2 \le x(y^2+1)$, тобто $(x-1)(y^2-x) \ge 0$. Аналогічно $\frac{y}{x^2+1} \le \frac{y^2}{x^2+y^2}$, а отже $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \le \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$.

II спосіб. Домножимо обидві частини нерівності на $(x^2+1)(y^2+1) > 0$ та дістанемо рівносильну нерівність $x^2y^2+x^2+y^2+1-x^3-x-y^3-y \ge 0$. Запишемо цю нерівність у вигляді $(x^2-y)(y^2-x)+x^2+y^2+1-xy-x-y \ge 0$. Залишається зауважити, що $(x^2-y)(y^2-x) \ge 0$ та $x^2+y^2+1-xy-x-y = \frac{1}{2}\big((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\big) \ge 0$.

9.5. Покажемо, що виграшну стратегію має перший гравець. Будемо позначати позицію у грі перед ходом першого гравця (a,b), де a,b — кількості монет у капелюхах першого та другого гравців відповідно. Спочатку доведемо, що перший гравець може діяти так, аби перед кожним його ходом виникала позиція (a,b), у якій $|a-b| \le 1$. Справді, для початкової позиції $(0,0)$ це так. У позиції (a,a) перший гравець покладе у капелюх 3 монети та після відповіді другого гравця дістане позицію $(a+3, a+2)$ або $(a+3, a+3)$. У позиції $(a, a-1)$ перший гравець перший гравець покладе у капелюх 2 монети та після відповіді другого гравця дістане позицію $(a+2, a+2)$ або $(a+1, a+2)$. Нарешті, у позиції $(a, a+1)$ перший гравець перший гравець покладе у капелюх 3 монети та після відповіді другого гравця дістане позицію $(a+4, a+3)$ або $(a+3, a+3)$. Якщо перед деяким ходом першого гравця $a \geq 97$, то найближчим ходом він покладе у капелюх три монети та переможе, а якщо $a \leq 96$ та $b \leq 96$, то жоден із гравців не переможе найближчим ходом. Тому описана стратегія забезпечує виграш першого гравця за умови, що перед його ходом ніколи не зустрічається позиція $(96, 97)$. Але згідно описаної стратегії першого гравця позиція $(96, 97)$ може з'явитися лише у випадку, якщо перед попереднім його ходом була позиція $(95, 94)$. Залишилося окремо розглянути випадок, коли перший гравець має зробити хід у позиції $(95, 94)$. Він покладе у капелюх 3 монети, після відповіді другого гравця дістане позицію $(98, 96)$ або $(97, 98)$ та найближчим ходом виграє.

10.1. *Відповідь:* а) ні; б) так.
а) Якщо деякі двоє гномів раніше не були, а потім стали сусідами, то кожен з них є новим сусідом іншого. Тому загальна кількість нових сусідів усіх гномів є парною. Але якщо гномів 9, то ця кількість має дорівнювати 9, суперечність. б) Занумеруємо гномів. Умова виконується, наприклад, якщо спочатку гноми стояли у порядку $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, а потім у порядку $1, 2, 9, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 4, 11, 12$.

Зауваження. Неважко показати, що описана в умові задачі ситуація для $3n$ гномів можлива тоді й лише тоді, коли n парне.

10.5. *Відповідь:* так.
Відкладемо від точок A, B та C вектори $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = \ell\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{CF} = m\overrightarrow{CA}$, де k, ℓ, m — деякі цілі числа, відмінні від 0 та 1. Зрозуміло, що точки D, E, F належать прямим AB, BC та AC відповідно та є різними, а оскільки точки A, B, C та вектори $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ мають цілі координати, то точки D, E, F теж мають цілі координати. Отже, якщо точки D, E, F лежать на одній прямій, то пряма $D-E-F$ є шуканою. Оскільки $\overrightarrow{DB} = (1-k)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC} = (1-\ell)\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{FA} = (1-m)\overrightarrow{CA}$, то за теоремою Менелая точки D, E, F лежать на одній прямій тоді й лише тоді, коли

$$\tfrac{k}{1-k} \cdot \tfrac{\ell}{1-\ell} \cdot \tfrac{m}{1-m} = -1.$$

Наприклад, це так при $k = 3$, $\ell = 4$, $m = -1$, бо $\frac{3}{-2} \cdot \frac{4}{-3} \cdot \frac{-1}{2} = -1$.

Усна математична олімпіада

1. Оскільки кожен першорозрядник зіграв із 49 першорозрядниками та з 7 іншими шахістами, то ігор між першорозрядниками та не першорозрядниками було $50 \cdot 7$. Кожен шахіст, який не є першорозрядником, грав щонайбільше з 49 шахістами, які не є першорозрядниками, та щонайменше із 7 першорозрядниками. Тому якби деякий шахіст, що не є першорозрядником, зіграв не з усіма не першорозрядниками, то ігор між першорозрядниками та не першорозрядниками було би більше за $50 \cdot 7$, суперечність. Отже, кожні двоє не першорозрядників грали один з одним. Таким чином, клуб достатньо поділити на першорозрядників та всіх інших шахістів.

2. *Відповідь:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

I спосіб. Нехай A_1BC_1 — трикутник зі сторонами $A_1B = b$, $BC_1 = c$ і кутом $\angle A_1BC_1 = 120^\circ$, а C_2DA_2 — трикутник зі сторонами $C_2D = d$, $DA_2 = a$ і кутом $\angle C_2DA_2 = 60^\circ$. За теоремою косинусів

$$A_2C_2^2 = a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc = A_1C_1^2,$$

отже $A_1C_1 = A_2C_2$ та трикутники можна скласти так, щоб вони утворили чотирикутник $ABCD$ зі сторонами $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DA = a$, в якому $\angle ABC = 120^\circ$ та $\angle CDA = 60^\circ$ (рис. 4). Тоді $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$.

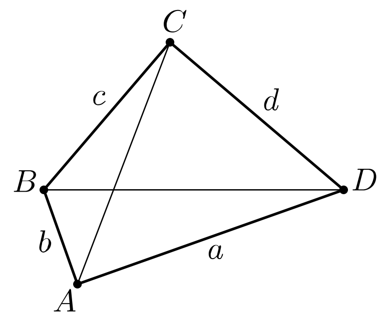

Рис. 4.

Якщо $\angle DAB > 90^\circ$, то $\angle BCD < 90^\circ$ та $a^2 + b^2 < BD^2 < c^2 + d^2$, суперечність. Аналогічно дістаємо суперечність при $\angle DAB < 90^\circ$. Отже, $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$.

Обчислимо тепер площу $ABCD$ двома способами:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} =& S_{CDA} + S_{ABC} = \tfrac{1}{2}ad\sin 60^\circ + \tfrac{1}{2}bc\sin 120^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{4}(ad + bc), \\ S_{ABCD} =& S_{ABD} + S_{BCD} = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd = \tfrac{1}{2}(ab + cd). \end{aligned}$$

Звідси $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

II спосіб. З рівності $a^2+d^2-ad = b^2+c^2+bc$ дістаємо, що $(a+d)^2-3ad = (b-c)^2+3bc$ та $(a-d)^2 + ad = (b+c)^2 - bc$, звідки

$$3(ad + bc) = (a + d)^2 - (b - c)^2, \quad ad + bc = (b + c)^2 - (a - d)^2.$$

Аналогічно з рівності $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ дістаємо, що $(a + b)^2 - 2ab = (c - d)^2 + 2cd$ та $(a - b)^2 + 2ab = (c + d)^2 - 2cd$, звідки

$$2(ab + cd) = (a + b)^2 - (c - d)^2, \quad 2(ab + cd) = (c + d)^2 - (a - b)^2.$$

Таким чином,

$$\frac{2(ab + cd)}{3(ad + bc)} = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{(a + d)^2 - (b - c)^2} = \frac{(a + b - c + d)(a + b + c - d)}{(a - b + c + d)(a + b - c + d)} = \frac{a + b + c - d}{a - b + c + d},$$
$$\frac{2(ab + cd)}{ad + bc} = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{(b + c)^2 - (a - d)^2} = \frac{(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)} = \frac{a - b + c + d}{a + b + c - d}.$$

Отже, $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{ab+cd}{ad+bc}\right)^2 = 1$, звідки $\frac{ab+cd}{ad+bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Нехай D — точка дотику з дугою BC, яка є серединою відрізка $D'D''$, E — точка дотику з дугою AC, яка є серединою відрізка $E'E''$, та F — точка дотику з дугою AB, яка є серединою відрізка $F'F''$, де точки D', E', F' належать прямій AB, а точки D'', E'', F'' — прямій AC (рис. 5). Доведемо, що трикутник DEF є рівностороннім.

Оскільки AD — медіана прямокутного трикутника $AD'D''$, то $AD = DD''$, звідки $\angle CD''D = \angle CAD$. Також $\angle CDD'' = \angle CAD$ як кут між хордою та дотичною. Звідси

$$\angle ACD = \angle CD''D + \angle CDD'' = 2\angle CAD,$$

а отже точка D ділить дугу $\smile ADC$ у відношенні $2:1$. Так само встановлюємо, що точка E ділить дугу $\smile AEC$ у відношенні $2:1$, тому $\smile DCE = 120^\circ$. Аналогічно $\smile DBF = 120^\circ$, отже трикутник DEF є рівностороннім.

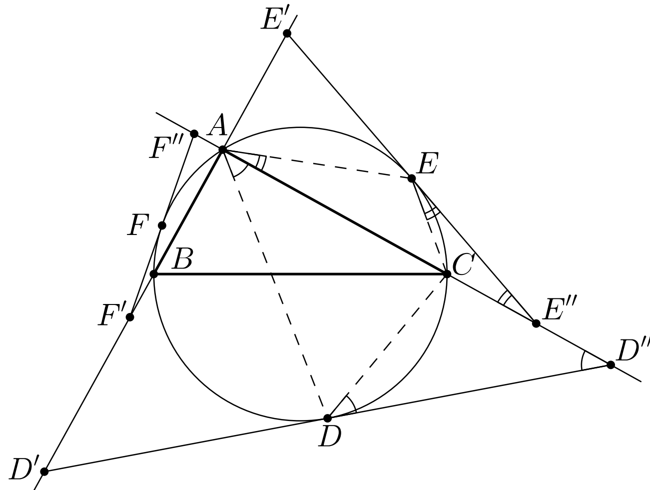

Рис. 5.

4. Покажемо, що у кожному числі a, яке містить принаймні 2018 цифр, знайдеться потрібне підчисло. Звідси випливатиме, що умову задовольняє $N = 10^{2017}$. Нехай $a = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$, де $k \geq 2017$. Якщо a містить цифру 0, то 0 — шукане підчисло. Надалі будемо вважати, що всі цифри числа a ненульові. Для $0 \leq i \leq 2017$ покладемо $b_i = \overline{a_i a_{i-1} \dots a_0}$. За принципом Діріхле існують такі $0 \leq i < j \leq 2017$, що $b_j - b_i$ ділиться на 2017. Але $b_j - b_i = c \cdot 10^i$, де $c = \overline{a_j \dots a_{i+1}}$ є підчислом a. Оскільки числа 2017 та 10 взаємно прості, то c ділиться на 2017.

5. *Відповідь:* $P(x) = ax^2 + ax + c$, де a та c — довільні дійсні числа.
Припустимо, що $P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$, де $c_0 \neq 0$, — многочлен степеня $n \geq 3$. Тоді $P(x-1) = c_0(x-1)^n + c_1(x-1)^{n-1} + \ldots = c_0x^n + (c_1 - nc_0)x^{n-1} + \ldots$ та неважко перевірити, що $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ — многочлен степеня n зі старшим коефіцієнтом $(2-n)c_0 \neq 0$, а тому $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ не є константою. Отже, $P(x) = ax^2 + bx + c$ — многочлен щонайбільше другого степеня. Перевірка показує, що цей многочлен задовольняє умову тоді й лише тоді, коли $a = b$.

6. *Відповідь:* при всіх непарних n.
Якщо n — парне число, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1) \equiv 0 \pmod{n+1}$, отже остача 0 повторюється та умова не виконується.

Тепер припустимо, що $n = 2k+1$ — непарне число. Покажемо, що умову задовольняє, наприклад, послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}) = (1, 2k, 3, 2k-2, 5, 2k-4, \ldots, 2, 2k+1)$, де $a_i = i$, якщо i непарне, та $a_i = 2k + 2 - i$, якщо i парне, $1 \leq i \leq 2k+1$. Зауважимо, що ця послідовність справді є перестановкою чисел $1, 2, \ldots, 2k+1$.

Знайдемо остачі від ділення чисел $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ на $n + 1 = 2k + 2$ окремо при парних та непарних m, де $1 \leq m \leq 2k+1$. Оскільки $a_1 = 1$ та

$$a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = \ldots = a_{2k} + a_{2k+1} = 2k + 3 \equiv 1 \pmod{2k+2},$$

то числа $s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2k+1}$ дають остачі $1, 2, 3 \ldots, k+1$ при діленні на $2k+2$.

Аналогічно оскільки

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \ldots = a_{2k-1} + a_{2k} = 2k + 1 \equiv -1 \pmod{2k+2},$$

то $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}$ дають остачі $2k+1, 2k, 2k-1, \ldots, k+2$ при діленні на $2k+2$.

Отже, $0, s_1, s_2, \ldots, s_{2k+1}$ справді дають всі різні остачі при діленні на $2k+2$, що завершує розв'язання задачі.

Математичний експрес

1.1. Наприклад, шуканим є число $2 \cdot 5^{2016}$. Справді, випишемо всі його дільники: $1, 5, \ldots, 5^{2016}, 2, 2 \cdot 5, \ldots, 2 \cdot 5^{2016}$. Добуток усіх цих дільників містить рівно 2017 множників 2 та понад 2017 множників 5, тому він закінчується рівно на 2017 нулів.

1.2. Оскільки довжина проекції даного чотирикутника на будь-яку пряму менша за 4 см, то його можна помістити у квадрат зі стороною 4 см. Радіус кола, описаного навколо цього квадрата, дорівнює $2\sqrt{2} < 3$.

1.3. *Відповідь:* $\frac{1}{2}$.
Нехай пряма BM перетинає сторону AC у точці D (рис. 6). У трикутнику BCD бісектриса CM є висотою, тому цей трикутник рівнобедрений та CM — його медіана. Отже, M — середина BD. Тоді $S_{CDM} = S_{CBM}$ та $S_{ADM} = S_{ABM}$, звідки $S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

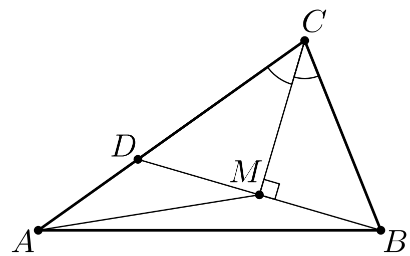

Рис. 6.

1.4. *Відповідь:* існує.
Розглянемо послідовність $a_n = 3^{2017-n} \cdot 4^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, 2017$. Для неї при кожному $1 \le k \le 2016$ маємо

$$a_k^2 + a_{k+1}^2 = \left(3^{2017-k} \cdot 4^{k-1}\right)^2 + \left(3^{2016-k} \cdot 4^{k}\right)^2 = \left(3^{2016-k} \cdot 4^{k-1}\right)^2 \cdot (3^2 + 4^2) = \left(3^{2016-k} \cdot 4^{k-1}\right)^2 \cdot 5^2.$$

2.1. *Відповідь:* 32, 64.
Нехай число $A = 2^{m+n}$ містить $k > 1$ цифр та починається з цифри c, а при викреслюванні його першої цифри утворюється число $B = 2^m$. Тоді $A - B = 2^m(2^n - 1) = c \cdot 10^{k-1}$, отже $2^n - 1$ ділиться на 5. Оскільки остачі від ділення степенів двійки на 5 повторюються з періодом 4: $2, 4, 3, 1, 2, 4, \ldots$, то n ділиться на 4. Нехай $n = 4\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. Число $c \cdot 10^{k-1}$ ділиться на $2^n - 1 = 2^{4\ell} - 1 = 4^{2\ell} - 1 = (4^\ell - 1)(4^\ell + 1)$. Але один з множників $4^\ell - 1$ та $4^\ell + 1$ є взаємно простим з 10. Тому $4^\ell - 1$ або $4^\ell + 1$ є дільником числа $1 \le c \le 9$, що неможливо при $\ell \ge 2$. Отже, $\ell = 1$, $n = 4$ та $A - B = 15 \cdot 2^m = c \cdot 10^{k-1}$, або $3 \cdot 2^{m-1} = c \cdot 10^{k-2}$. Ліва частина останньої рівності не ділиться на 5, тому $k = 2$ та $3 \cdot 2^{m-1} = c$. Звідси $m = 1$, $c = 3$ або $m = 2$, $c = 6$. Відповідно $a = 2^5 = 32$ або $a = 2^6 = 64$.

2.2. За властивостями вписаних кутів маємо

$$\angle BAP = \angle BQP = \angle RQP = \angle RCP = \angle RCB$$

(рис. 7), а оскільки ромб симетричний відносно прямої BD, то $\angle RCB = \angle BAR$. Отже, $\angle BAP = \angle BAR$ та точки A, R і P лежать на одній прямій.

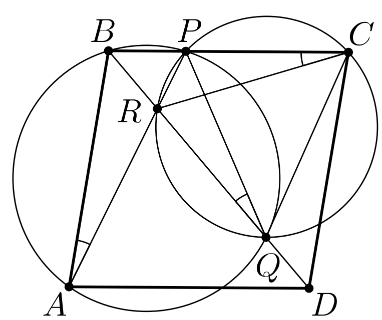

Рис. 7.

2.3. *Відповідь:* 500.
З рівності $(x+2)^2-(x+1)^2=(x+1)^2-x^2+2$ випливає, що вдруге сума квадратів збільшилася на $2n$.

2.4. *Відповідь:* $n=3$.
При $n=2$ та числах $x_1=1$, $x_2=-1$ маємо $1^2+(-1)^2\neq 2\cdot 1\cdot(-1)$. При $n\geq 4$ розглянемо набір чисел $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$, $x_4=\ldots=x_n=0$. Для цих чисел має виконуватися рівність $1+1+(-2)^n=0$, що неможливо при $n>1$. Нарешті, при $n=3$ для всіх x_1,x_2,x_3 таких, що $x_1+x_2+x_3=0$, маємо $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$. Це випливає з відомої тотожності

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3).$$

3.1. Нехай найбільша сторона (або одна з найбільших сторін) многокутника AB дотикається до вписаного кола у точці K, а BC, AD — сусідні з AB сторони многокутника. Тоді $BC>BK$ та $AD>AK$, отже $BC+AD>AB$ та зі сторін AB, BC, AD можна скласти трикутник.

3.2. а) Для розв'язання достатньо отримати таке число a, що $a<2017$ та $2018-a$ ділиться на 9, а потім додати до числа 9 необхідну кількість разів. Це можна зробити, наприклад, так:

$$2017\to 207\to 216\to 26\to 71=26+5\cdot 9\to$$
$$\to 7\to 16\to 6\to 15\to 5\to 14\to 4\to 13\to 3\to 12\to 2\to 2018=2+224\cdot 9.$$

б) Розглянемо число $k=(n+1)\cdot 10^8+\underbrace{11\ldots 1}_{\text{8 одиниць}}$. Зрозуміло, що $k-n$ ділиться на 9. Тому з числа n можна отримати число $k=n+9m$, а потім у записі числа k закреслити вісім одиниць.

3.3. $x=0$, $y=0$ або $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.
З умови випливає, що $y\geq x^2+xy$. Тому

$$3xy\geq y^2+y+\sqrt{y-x^2-xy}\geq y^2+x^2+xy+\sqrt{y^2-x^2-xy},$$

тобто $(x-y)^2+\sqrt{y-x^2-xy}\leq 0$. Остання нерівність означає, що одночасно $x-y=0$ та $y-x^2-xy=0$. Звідси $x=0$, $y=0$ або $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. Перевірка свідчить, що знайдені розв'язки задовольняють початкову нерівність.

3.4. *Відповідь:* не існує.
Припустимо, що така послідовність існує. Тоді для будь-якого натурального n виконується нерівність $a_{n+1}^2\geq 4a_na_{n+2}$. Звідси

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\leq\frac{1}{4}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{1}{4^2}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\leq\ldots\leq\frac{1}{4^n}\cdot\frac{a_2}{a_1}.$$

При достатньо великих n маємо $\frac{1}{4^n}\cdot\frac{a_2}{a_1}<1$, а отже $a_{n+2}<a_{n+1}$. Таким чином, починаючи з деякого місця послідовність натуральних чисел спадає, що неможливо.