## Сімнадцятий Київський математичний фестиваль
## 8-й клас

**1.** Назвемо замком квадрат $2 \times 2$, одну з клітинок якого займає вежа. Яку найбільшу кількість замків можна розташувати на дошці $7 \times 7$ так, аби замки не мали спільних клітинок та всі вежі знаходились на діагоналях дошки?

**2.** Нехай $M$ — точка перетину медіан $AD$ та $BE$ прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle C = 90°$). Відомо, що описані кола трикутників $AEM$ та $CDM$ дотикаються. Знайти кут $\angle BMC$.

**3.** Коло поділено 2018 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Програє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

**4.** Знайти всі натуральні числа $n$, для яких найбільший простий дільник числа $n^2 + 3$ дорівнює найменшому простому дільнику числа $n^4 + 6$.

**5.** На столі викладені у ряд $n$ ($n \geq 10$) карток з номерами $1, 2, \ldots, n$ числами вниз так, що числа на будь-яких сусідніх картках відрізняються принаймні на 5. Чи завжди достатньо перевернути щонайбільше $n - 5$ карток, аби дізнатись, на якій картці записано номер $n$? (Картку з числом $n$ перевертати не обов'язково.)

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

## Семнадцатый Киевский математический фестиваль
## 8-й класс

**1.** Назовём замком квадрат $2 \times 2$, одну из клеток которого занимает башня. Какое наибольшее количество замков можно разместить на доске $7 \times 7$ так, чтобы замки не имели общих клеток и все башни находились на диагоналях доски?

**2.** Пусть $M$ — точка пересечения медиан $AD$ и $BE$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$). Известно, что описанные окружности треугольников $AEM$ и $CDM$ касаются. Найти угол $\angle BMC$.

**3.** Окружность поделена 2018 точками на равные части. Двое игроков по очереди зачеркивают эти точки. Проигрывает игрок, после хода которого можно провести диаметр окружности так, что по одну сторону от него нет незачеркнутых точек. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

**4.** Найти все натуральные числа $n$, для которых наибольший простой делитель числа $n^2 + 3$ равен наименьшему простому делителю числа $n^4 + 6$.

**5.** На столе выложены в ряд $n$ ($n \geq 10$) карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$ числами вниз так, что числа на любых соседних карточках отличаются хотя бы на 5. Всегда ли достаточно перевернуть не более $n - 5$ карточек, чтобы узнать, на какой карточке записан номер $n$? (Карточку с числом $n$ переворачивать не обязательно.)

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

## The seventeenth Kyiv mathematical festival
## 8-th form

**1.** A square of size $2 \times 2$ with one of its cells occupied by a tower is called a castle. What maximal number of castles one can place on a board of size $7 \times 7$ so that the castles have no common cells and all the towers stand on the diagonals of the board?

**2.** Let $M$ be the intersection point of the medians $AD$ and $BE$ of a right triangle $ABC$ ($\angle C = 90°$). It is known that the circumcircles of triangles $AEM$ and $CDM$ are tangent. Find the angle $\angle BMC$.

**3.** A circle is divided by 2018 points into equal parts. Two players delete these points in turns. A player loses, if after his turn it is possible to draw a diameter of the circle such that there are no undeleted points on one side of it. Which player has a winning strategy?

**4.** Find all positive integers $n$ for which the largest prime divisor of $n^2 + 3$ is equal to the least prime divisor of $n^4 + 6$.

**5.** There are $n$ ($n \geq 10$) cards with numbers $1, 2, \ldots, n$ lying in a row on a table, face down, so that the numbers on any adjacent cards differ by at least 5. Is it always enough to turn at most $n - 5$ cards to determine which of the cards has number $n$? (It is not necessary to turn the card with number $n$.)

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

## Сімнадцятий Київський математичний фестиваль
## 9-й клас

**1.** Назвемо замком квадрат $2 \times 2$, одну з клітинок якого займає вежа. Яку найбільшу кількість замків можна розташувати на дошці $7 \times 7$ так, аби замки не мали спільних клітинок та всі вежі знаходились на діагоналях дошки?

**2.** Нехай $M$ — точка перетину медіан $AD$ та $BE$ прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ та $\omega_2$ — описані кола трикутників $AEM$ та $CDM$. Відомо, що кола $\omega_1$ та $\omega_2$ дотикаються. Знайти відношення, в якому коло $\omega_1$ ділить $AB$.

**3.** Для довільних $x, y \geq 0$ довести, що $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2\sqrt{2xy}$.

**4.** Чи існують такі натуральні числа $a$ та $b$, що кожне з чисел $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ та $5^a + 2^b$ ділиться на 29?

**5.** Коло поділено 2019 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Програє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

## Семнадцатый Киевский математический фестиваль
## 9-й класс

**1.** Назовём замком квадрат $2 \times 2$, одну из клеток которого занимает башня. Какое наибольшее количество замков можно разместить на доске $7 \times 7$ так, чтобы замки не имели общих клеток и все башни находились на диагоналях доски?

**2.** Пусть $M$ — точка пересечения медиан $AD$ и $BE$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ и $\omega_2$ — описанные окружности треугольников $AEM$ и $CDM$. Известно, что окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ касаются. Найти отношение, в котором окружность $\omega_1$ делит $AB$.

**3.** Для любых $x, y \geq 0$ доказать, что $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2\sqrt{2xy}$.

**4.** Существуют ли такие натуральные числа $a$ и $b$, что каждое из чисел $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ и $5^a + 2^b$ делится на 29?

**5.** Окружность поделена 2019 точками на равные части. Двое игроков по очереди зачеркивают эти точки. Проигрывает игрок, после хода которого можно провести диаметр окружности так, что по одну сторону от него нет незачеркнутых точек. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

## The seventeenth Kyiv mathematical festival
## 9-th form

**1.** A square of size $2 \times 2$ with one of its cells occupied by a tower is called a castle. What maximal number of castles one can place on a board of size $7 \times 7$ so that the castles have no common cells and all the towers stand on the diagonals of the board?

**2.** Let $M$ be the intersection point of the medians $AD$ and $BE$ of a right triangle $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ and $\omega_2$ be the circumcircles of triangles $AEM$ and $CDM$. It is known that the circles $\omega_1$ and $\omega_2$ are tangent. Find the ratio in which the circle $\omega_1$ divides $AB$.

**3.** For every $x, y \geq 0$ prove that $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 2\sqrt{2xy}$.

**4.** Do there exist positive integers $a$ and $b$ such that each of the numbers $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ and $5^a + 2^b$ is divisible by 29?

**5.** A circle is divided by 2019 points into equal parts. Two players delete these points in turns. A player loses, if after his turn it is possible to draw a diameter of the circle such that there are no undeleted points on one side of it. Which player has a winning strategy?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

## Сімнадцятий Київський математичний фестиваль
## 10-й клас

**1.** Назвемо замком квадрат $2 \times 2$, одну з клітинок якого займає вежа. Яку найбільшу кількість замків можна розташувати на дошці $7 \times 7$ так, аби замки не мали спільних клітинок та всі вежі знаходились на діагоналях дошки?

**2.** Нехай $M$ — точка перетину медіан $AD$ та $BE$ прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ та $\omega_2$ — описані кола трикутників $AEM$ та $CDM$. Відомо, що кола $\omega_1$ та $\omega_2$ дотикаються. Знайти відношення, в якому коло $\omega_2$ ділить $AC$.

**3.** Чи існують такі натуральні числа $a$ та $b$, що кожне з чисел $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ та $5^a + 2^b$ ділиться на 29?

**4.** Для довільних $x, y \geq 0$ довести, що $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq \frac{8y\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}$.

**5.** Коло поділено 2019 точками на рівні частини. Двоє гравців по черзі закреслюють ці точки. Виграє гравець, після ходу якого можна провести діаметр кола так, що по одну сторону від нього немає незакреслених точок. Хто з гравців має виграшну стратегію?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

## Семнадцатый Киевский математический фестиваль
## 10-й класс

**1.** Назовём замком квадрат $2 \times 2$, одну из клеток которого занимает башня. Какое наибольшее количество замков можно разместить на доске $7 \times 7$ так, чтобы замки не имели общих клеток и все башни находились на диагоналях доски?

**2.** Пусть $M$ — точка пересечения медиан $AD$ и $BE$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ и $\omega_2$ — описанные окружности треугольников $AEM$ и $CDM$. Известно, что окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ касаются. Найти отношение, в котором окружность $\omega_2$ делит $AC$.

**3.** Существуют ли такие натуральные числа $a$ и $b$, что каждое из чисел $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ и $5^a + 2^b$ делится на 29?

**4.** Для любых $x, y \geq 0$ доказать, что $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq \frac{8y\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}$.

**5.** Окружность поделена 2019 точками на равные части. Двое игроков по очереди зачеркивают эти точки. Выигрывает игрок, после хода которого можно провести диаметр окружности так, что по одну сторону от него нет незачеркнутых точек. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

## The seventeenth Kyiv mathematical festival
## 10-th form

**1.** A square of size $2 \times 2$ with one of its cells occupied by a tower is called a castle. What maximal number of castles one can place on a board of size $7 \times 7$ so that the castles have no common cells and all the towers stand on the diagonals of the board?

**2.** Let $M$ be the intersection point of the medians $AD$ and $BE$ of a right triangle $ABC$ ($\angle C = 90°$), $\omega_1$ and $\omega_2$ be the circumcircles of triangles $AEM$ and $CDM$. It is known that the circles $\omega_1$ and $\omega_2$ are tangent. Find the ratio in which the circle $\omega_2$ divides $AC$.

**3.** Do there exist positive integers $a$ and $b$ such that each of the numbers $2^a + 3^b$, $3^a + 5^b$ and $5^a + 2^b$ is divisible by 29?

**4.** For every $x, y \geq 0$ prove that $(x+1)^2 + (y-1)^2 \geq \frac{8y\sqrt{xy}}{3\sqrt{3}}$.

**5.** A circle is divided by 2019 points into equal parts. Two players delete these points in turns. A player wins, if after his turn it is possible to draw a diameter of the circle such that there are no undeleted points on one side of it. Which player has a winning strategy?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.