П'ятнадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

З 7 по 10 травня цього року відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8-10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у студентському військово-спортивному таборі "Сосновий" у місті Українка.

Цього року у фестивалі взяли участь українські команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, Львівського фізико-математичного ліцею, фізико-математичної гімназії № 17 (м. Вінниця), гімназії № 28 (м. Запоріжжя), ЗОШ № 1 (м. Українка), збірна команда Київської області та київські команди Українського фізико-математичного ліцею, Русанівського ліцею, ліцею "Наукова зміна" та ліцею "Лідер". Також у фестивалі взяла участь команда Малого мехмату МДУ (м. Москва, Росія).

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці усної олімпіади (10 клас).

I місце: Всеволод Решетніков ("Лідер").

II місце: Вієт Фам Хоанг (ХФМЛ №27), Микита Вєпрік (ХФМЛ №27, 9 клас), Георгій Іванчик ("Лідер", 9 клас).

III місце: Михайло Бондаренко ("Лідер", 9 клас), Анна Кравець ("Лідер"), Олександр Миргородський (ДОЛІФМП), Петро Тарнавський (ЛФМЛ).

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Костянтин Луценко (УФМЛ).

II місце: Ілля Лазуренко (ХФМЛ №27, 7 клас), Денис Слободянюк (ХФМЛ №27), Олександр Войтович (ХФМЛ №27).

III місце: Борис Нижник (УФМЛ), Лія Дулгер (ЛФМЛ), Михайло Купріянов (ХФМЛ №27), Олексій Масалітін (ХФМЛ №27, 7 клас), Максим Процик (ЛФМЛ), Валерій Філінюк ("Лідер"), Володимир Фединяк (ЛФМЛ), Михайло Цисін ("Лідер").

[1] механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка

[2] Інститут математики НАН України

IV місце: Андрій Абдулаєв ("Наукова зміна", 7 клас), Марія Воротинцева (ДОЛІ-ФМП), Вадим Коваль (УФМЛ), Антон Москальков ("Лідер"), Олексій Рожков (ХФМЛ №27), Устин Сахнюк (ХФМЛ №27), Даниїл Стояновський ("Лідер"), Денис Федорович (УФМЛ), Михайло Штанденко ("Лідер", 7 клас), Дмитро Ярошевич ("Наукова зміна", 7 клас), Юрій Гладков (ХФМЛ №27, 7 клас), Анастасія Руденко ("Лідер").

9 клас

I місце: Аліна Гарбузова (ХФМЛ №27), Ілля Коваль (АГ №45, Харків), Григорій Назаренко (ХФМЛ №27), Олег Кондратенко (Київська обл.), Арсеній Ніколаєв (Малий мехмат).

II місце: Георгій Іванчик ("Лідер"), Михайло Бондаренко ("Лідер"), Микита Вєпрік (ХФМЛ №27), Матвій Катаєв (Малий мехмат), Артур Кравцов (АГ №45, Харків), Віталій Папка (ЛФМЛ).

III місце: Кирило Баркалов (ХФМЛ №27), Олексій Крупчицький (ХФМЛ №27), Михайло Самін (Малий мехмат), Денис Сікорський ("Лідер").

10 клас

I місце: Вієт Фам Хоанг (ХФМЛ №27).

II місце: Анна Кравець ("Лідер"), Всеволод Решетніков ("Лідер"), Анатолій Яцук (ЛФМЛ), Петро Тарнавський (ЛФМЛ).

III місце: Марія Гнип (ХФМЛ №27), Катерина Васильєва ("Лідер"), Юрій Казан (ЛФМЛ).

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Довести, що для будь-яких натуральних чисел a та b існують такі натуральні числа x та y, що
$$\frac{x}{y+a}+\frac{y}{x+b}=\frac{3}{2}.$$

2. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 5 спільних точок з іншими колами?

3. Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці 7×7 кожен своїм кольором. Гравець не може пофарбувати клітинку, якщо в одному рядку або одному стовпчику з нею вже є клітинка, пофарбована іншим гравцем. Гра закінчується, коли один з гравців не може зробити хід. Яка найбільша кількість клітинок може залишитися непофарбованою?

4. Нехай H — точка перетину висот AD та BE гострокутного трикутника ABC. Кола з діаметрами AE та BD дотикаються в точці L. Довести, що HL — бісектриса кута $\angle AHB$.

5. На дошці написано деяке двадцятицифрове число, запис якого містить 10 одиниць та 10 двійок. Дозволяється обирати довільні дві різні цифри та змінювати порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний. Чи завжди за допомогою таких операцій можна дістати число, яке ділиться на 11?

9 клас

1. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 6 спільних точок з іншими колами?

2. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $ab + bc + ca = 2$. Довести, що

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} + 2(a+b+c) \geq 6.$$

3. Див. задачу 8.3.

4. Див. задачу 8.5.

5. Нехай AD та BE — висоти гострокутного трикутника ABC. Кола з діаметрами AD та BE перетинаються в точках S та T. Довести, що $\angle ACS = \angle BCT$.

10 клас

1. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 7 спільних точок з іншими колами?

2. Див. задачу 8.3.

3. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $ab + bc + ca = 3$. Довести, що

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Див. задачу 9.5.

5. На дошці написано всі двадцятицифрові числа, запис яких містить 10 одиниць та 10 двійок. Дозволяється обирати у деякому числі довільні дві різні цифри та змінювати порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний. Яку найбільшу кількість однакових чисел можна дістати на дошці за допомогою таких операцій?

Автори задач: В. Брайман (8.3=9.3=10.2, 8.5=9.4∼10.5, 9.5=10.4, 9.2), В. Брайман та О. Руденко (8.1, 8.4), О. Руденко (8.2∼9.1∼10.1, 10.3).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Двадцять сім куль, занумерованих числами від 1 до 27, розкладені у червоний, синій та жовтий кошики. Знайдіть усі можливі значення для кількості куль у червоному кошику, якщо середні значення номерів куль у червоному, синьому та жовтому кошиках дорівнюють 15, 3 та 18 відповідно.

2. На кожній клітинці дошки $n \times n$ лежать 99 камінців. Двоє грають у гру. За хід можна обрати довільний рядок чи стовпчик, у кожній клітинці якого є принаймні один камінець, та зняти по одному камінцю з кожної його клітинки. Програє той, хто не може зробити хід. Визначте всі n, для яких перший гравець має виграшну стратегію.

3. На стороні BC трикутника ABC відмітили точку D. Пряма, яка проходить через точку D, перетинає сторону AB у точці X, а промінь AC — у точці Y. Коло, описане навколо трикутника BXD, перетинає описане коло ω трикутника ABC у точці $Z \neq B$. Прямі ZD та ZY вдруге перетинають коло ω у точках V та W відповідно. Доведіть, що $AB = VW$.

4. Знайдіть усі послідовності невід'ємних цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$, кожне з яких не перевищує 2016, що задовольняють таку умову: $ia_i + ja_j$ ділиться на $i + j$ при всіх $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$.
5. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такі, що для кожного натурального n виконується умова $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$.
6. Знайдіть усі натуральні n, для яких $\dfrac{n^2+1}{[\sqrt{n}]^2+2}$ є цілим. (Тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.)

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[3]

1.1. У складанні 40 задач взяло участь 30 студентів з п'яти курсів. Кожні два однокурсники придумали однакову кількість задач. Кожні два студенти з різних курсів придумали різну кількість задач. Скільки осіб придумало рівно по одній задачі?

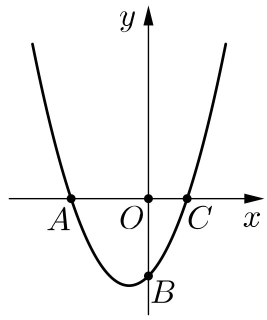

Рис. 1.

1.2. На рис. 1 зображений графік функції $y = x^2 + ax + b$. Відомо, що пряма AB перпендикулярна прямій $y = x$. Знайдіть довжину відрізка OC.
1.3. Точка M — середина сторони CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle ABC > 90^\circ$. Доведіть, що $AC + AD > 2BM$.
1.4. Пару послідовних натуральних чисел $(n; n+1)$ будемо називати *степеневою*, якщо в канонічному розкладі кожного з цих чисел показники степенів всіх простих множників більші одиниці. Наприклад, пари $(8; 9)$ та $(288; 289)$ — степеневі. Доведіть, що степеневих пар нескінченно багато.

2 тур

2.1. Розв'яжіть рівняння $\{(x+1)^2\} = x^2$.
2.2. Доведіть, що існує нескінченно багато попарно нерівних трикутників, у яких чисельні значення периметра і площі збігаються.
2.3. Числа a та b такі, що $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geq 4$. Доведіть, що $a^2 + b^2 \geq 2$.
2.4. Чи існують шість різних натуральних чисел, добуток будь-яких двох з яких ділиться націло на суму цих двох чисел?

3 тур

3.1. Доведіть, що якщо вираз $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ набуває раціональне значення, то вираз $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ теж набуває раціональне значення.

[3] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

3.2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

3.3. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. На продовженні сторони AB за точку B відмітили таку точку M, що $MC = MD$. Доведіть, що $\angle AMO = \angle MAD$.

3.4. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння $x^3 - y^3 = 4xy - 5$.

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

8.1. *I спосіб.* Будемо шукати такі x, y, для яких $y + a = x + b = S$. Тоді рівність набуває вигляду $\frac{S-b}{S} + \frac{S-a}{S} = \frac{3}{2}$, або $2(2S - a - b) = 3S$, звідки $S = 2(a+b)$, $x = 2a+b$ та $y = a + 2b$.

II спосіб. Будемо шукати такі x, y, для яких $\frac{x}{y+a} = \frac{1}{2}$ та $\frac{y}{x+b} = 1$. Звідси $x = a+b$, $y = a + 2b$.

8.2. *Відповідь:* так.

Декілька прикладів шуканого розміщення кіл зображено на рис. 2.

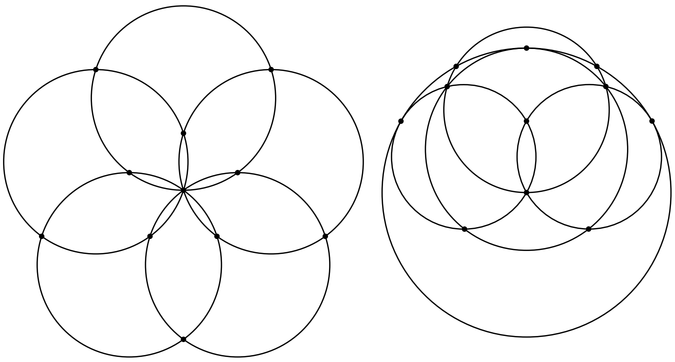

Рис. 2.

8.3. *Відповідь:* 40.

Нехай A — гравець, який першим не зміг зробити хід, B — його суперник. Якщо кожен з гравців A та B зробив не більше 4 ходів, то в таблиці є принаймні 3 рядки та 3 стовпчики, у яких немає клітинок кольору гравця B. Тому A може пофарбувати деяку з 9 клітинок на перетині цих рядків та стовпчиків, яку він не пофарбував раніше, суперечність. Отже, один з гравців мав зробити принаймні 5 ходів, а інший — принаймні 4. Залишається навести приклад гри, у якій другий гравець не може зробити п'ятий хід. Занумеруємо рядки та стовпчики таблиці. Нехай своїми першими 5 ходами перший гравець пофарбує клітинки з координатами $(1;1), (2;2), \ldots, (5;5)$, а другий гравець своїми першими 4 ходами пофарбує клітинки з координатами $(6;6), (6;7), (7;6)$

та $(7;7)$. Тоді другий гравець не може зробити наступний хід та пофарбовано лише 9 клітинок.

8.4. Нехай O_1, O_2 — середини AE та BD відповідно (рис. 3). Прямокутні трикутники AHE та BHD подібні, а HO_1 та HO_2 — їх медіани. Тому $HO_1/HO_2 = O_1E/O_2D = O_1L/O_2L$, звідки HL — бісектриса кута $\angle O_1HO_2$, та $\angle AHO_1 = \angle BHO_2$, звідки кути $\angle AHB$ та $\angle O_1HO_2$ мають спільну бісектрису. Отже, HL — бісектриса кута $\angle AHB$.

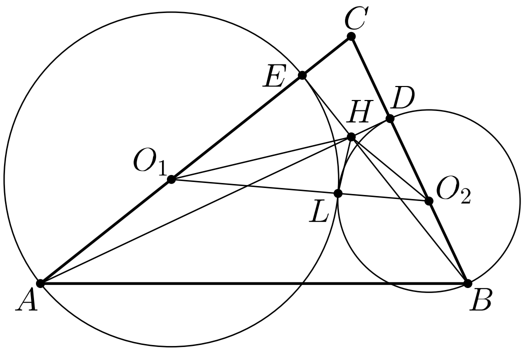

Рис. 3.

8.5. *Відповідь:* так.

Покажемо, що завжди можна дістати число, у якому одиниця та двійка стоять поряд щонайбільше у двох місцях. Справді, якщо у числі є фрагмент $12\ldots12$ або $21\ldots21$, то можна обрати крайні цифри цього фрагмента та застосувати операцію, при цьому дістанемо фрагмент $11\ldots22$ або $22\ldots11$ відповідно та кількість місць у числі, де одиниця та двійка стоять поряд, зменшиться на два. Так можна діяти, поки не дістанемо число, в якому щонайбільше один раз після 1 стоїть 2 та щонайбільше один раз після 2 стоїть 1. Таким чином, з кожного початкового числа можна утворити одне з чисел

$$\underbrace{1\ldots1}_{10}\underbrace{2\ldots2}_{10},\quad \underbrace{2\ldots2}_{10}\underbrace{1\ldots1}_{10},\quad \underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{2\ldots2}_{10}\underbrace{1\ldots1}_{10-k},\quad \underbrace{2\ldots2}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{10}\underbrace{2\ldots2}_{10-k},$$

де $1 \le k \le 9$. У кожному з цих чисел на парних та на непарних місцях стоять однакові кількості одиниць та двійок, тому всі ці числа діляться на 11.

II спосіб. Покажемо, що число, яке ділиться на 11, можна дістати вже після однієї операції. Нехай a — деяке число, запис якого складається з одиниць та двійок та a' — число, яке отримується з a викреслюванням двох сусідніх однакових цифр. З ознаки подільності на 11 випливає, що числа a та a' одночасно діляться або одночасно не діляться на 11. Припустимо, що можна обрати дві різні цифри числа a' та застосувати дозволену операцію так, аби утворилося число b', яке ділиться на 11. Якщо обрати ті самі цифри у числі a та застосувати дозволену операцію, то дістанемо деяке число b. Неважко перевірити, що число b' отримується з b викреслюванням двох сусідніх однакових цифр, а тому число b теж ділиться на 11. Розглянемо будь-яке двадцятицифрове число, запис якого містить 10 одиниць та 10 двійок та яке не ділиться на 11. Будемо викреслювати з цього числа пари сусідніх однакових цифр доти, доки не дістанемо число, в якому одиниці та двійки чергуються (всі цифри не буде викреслено, оскільки початкове число не ділиться на 11). Оскільки спочатку було 10 одиниць та 10 двійок та на кожному кроці викреслювали дві однакові цифри, то в кінцевому числі є парна кількість одиниць та парна кількість двійок, а оскільки одиниці та двійки чергуються, то ці кількості є однаковими. Отже, число після викреслювань має вигляд $12\ldots12$ або $21\ldots21$ та містить $4k$ цифр, де $1 \leq k \leq 5$. У цьому числі k-а та $(3k+1)$-а цифри є різними, а якщо змінити порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний, то дістанемо число, яке ділиться на 11. Тому якщо обрати ті самі цифри у початковому двадцятицифровому числі та застосувати дозволену операцію, то теж дістанемо число, яке ділиться на 11.

9.1. *Відповідь:* так.

Декілька прикладів шуканого розміщення кіл зображено на рис. 4.

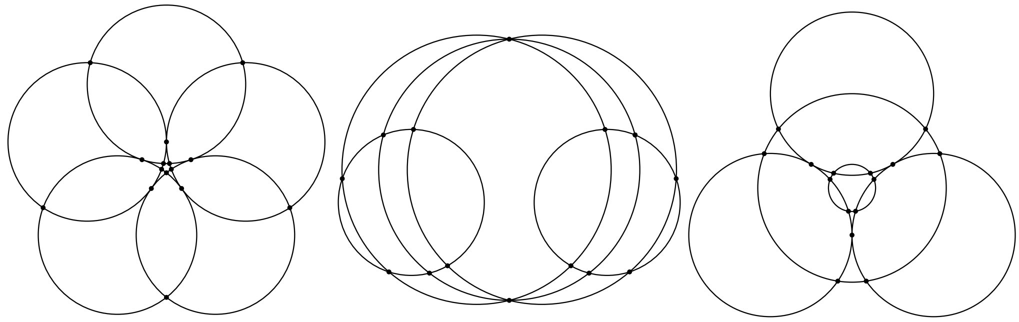

Рис. 4.

9.2. Зауважимо, що

$$\frac{ab}{c+1}+a+b=\frac{ab+ac+a+bc+b}{c+1}=\frac{2+a+b}{c+1}=\frac{a+1}{c+1}+\frac{b+1}{c+1}.$$

Аналогічно $\frac{bc}{a+1}+b+c=\frac{b+1}{a+1}+\frac{c+1}{a+1}$, $\frac{ca}{b+1}+c+a=\frac{c+1}{b+1}+\frac{a+1}{b+1}$. Звідси

$$\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}+2(a+b+c)=$$
$$=\left(\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{a+1}\right)+\left(\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{b+1}\right)+\left(\frac{c+1}{a+1}+\frac{a+1}{c+1}\right)\geq 6.$$

9.5. Якщо $AC=BC$, то точки S,T належать бісектрисі кута $\angle ACB$ та твердження є очевидним. Надалі будемо вважати, що $AC/BC=k>1$.

Нехай O_1, O_2 — середини AD та BE відповідно (рис. 5). Трикутники ACD та BCE подібні як прямокутні зі спільним гострим кутом, а CO_1 та CO_2 — їх медіани, тому

$$CO_1/CO_2=O_1D/O_2E=O_1S/O_2S=O_1T/O_2T=k>1$$

та $\angle ACO_1=\angle BCO_2$, звідки кути $\angle ACB$ та $\angle O_1CO_2$ мають спільну бісектрису. Відмітимо на O_1O_2 та на продовженні O_1O_2 такі точки L та K, що

$$O_1L/O_2L=O_1K/O_2K=k.$$

Тоді CL та CK — бісектриса та бісектриса зовнішнього кута трикутника O_1CO_2, звідки $\angle LCK = 90°$. Аналогічно $\angle LSK = \angle LTK = 90°$, тому точки C, S, T, L, K лежать на колі з діаметром KL. Оскільки трикутники O_1SO_2 та O_1TO_2 симетричні відносно O_1O_2, то L — середина дуги $\smile SLT$. Звідси CL — бісектриса кута $\angle SCT$. Але CL також є бісектрисою кутів $\angle O_1CO_2$ та $\angle ACB$, тому $\angle ACS = \angle BCT$.

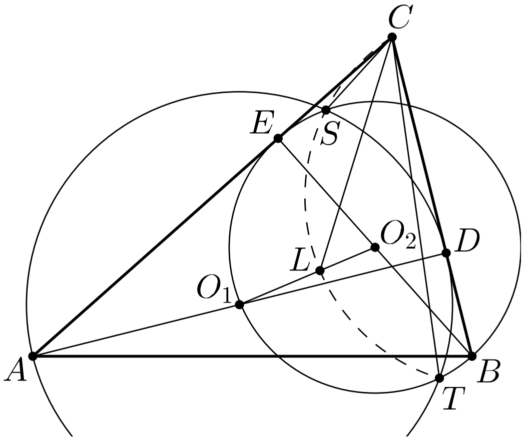

Рис. 5.

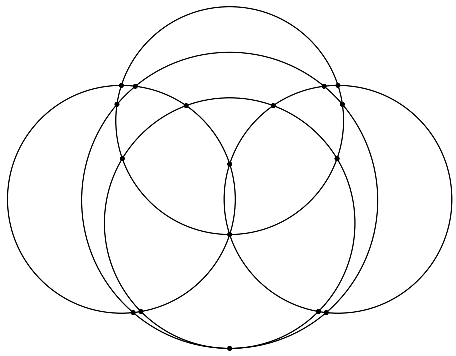

Рис. 6.

10.1. *Відповідь:* так.

Приклад шуканого розміщення кіл зображено на рис. 6.

10.3. Застосуємо нерівність Коші-Буняковського до наборів чисел $\sqrt{ab(c+1)}$, $\sqrt{bc(a+1)}$, $\sqrt{ca(b+1)}$ та $\sqrt{\frac{ab}{c+1}}, \sqrt{\frac{bc}{a+1}}, \sqrt{\frac{ca}{b+1}}$. Дістанемо

$$\big(abc + ab + abc + bc + abc + ca\big)\left(\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1}\right) \geq \big(ab + bc + ca\big)^2 = 9,$$

звідки $\dfrac{ab}{c+1} + \dfrac{bc}{a+1} + \dfrac{ca}{b+1} \geq \dfrac{9}{3abc+3} = \dfrac{3}{abc+1}$. Але за нерівністю Коші

$$1 = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2},$$

тому $abc \leq 1$ та $\dfrac{3}{abc+1} \geq \dfrac{3}{2}$, що завершує доведення.

10.5. *Відповідь:* C_{18}^9 чисел.

Зрозуміло, що дозволені операції не змінюють першу та останню цифру числа. Спочатку на дошці було записано по C_{18}^9 чисел вигляду $1\ldots2$, адже кожне таке число визначається набором місць, на яких стоять одиниці. Аналогічно на дошці було C_{18}^9 чисел вигляду $2\ldots1$ та по C_{18}^8 чисел вигляду $1\ldots1$ і $2\ldots2$. Оскільки $C_{18}^8 < C_{18}^9$, то число з жодними першою та останньою цифрами не може з'явитися на дошці більше за C_{18}^9 разів. З розв'язання задачі 8.5 випливає, що з кожного числа вигляду $1\ldots2$ можна утворити число $\underbrace{1\ldots1}_{10}\underbrace{2\ldots2}_{10}$, тому можна зробити однаковими C_{18}^9 чисел.

Усна математична олімпіада

1. *Відповідь:* 11, 16 або 21.

Позначимо r, b та y кількості куль у червоному, синьому та жовтому кошиках відповідно. Оскільки середнє значення п'яти найменших номерів дорівнює 3, то $b \le 5$. Оскільки $r + b + y = 27$ та $15r + 3b + 18y = 27 \cdot 14$, то $\begin{cases} 4r + 5y = 99, \\ b = 27 - r - y, \\ b \le 5. \end{cases}$ Розв'язками (r, b, y) є трійки (11, 5, 11), (16, 4, 7) та (21, 3, 3).

Залишається навести відповідні приклади розміщення куль. При $r = 11$ у червоному кошику $\{10, 11, \ldots, 20\}$; у синьому кошику $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. При $r = 16$ у червоному кошику $\{7, 8, \ldots, 14, 16, 17, \ldots, 23\}$; у синьому кошику $\{1, 2, 4, 5\}$. При $r = 21$ у червоному кошику $\{5, 6, \ldots, 25\}$; у синьому кошику $\{2, 3, 4\}$.

2. *Відповідь:* n — непарне число.

Доведемо, що гра закінчиться лише тоді, коли на дошці не залишиться жодного камінця. Позначимо (i, j) клітинку на перетині i-го рядка та j-го стовпчика. Нехай під час гри i-ий рядок було обрано r_i разів, а j-ий стовпчик — c_j разів. Припустимо, що в кінці гри залишилася непорожня клітинка (a, b). У рядку a та у стовпчику b є принаймні по одній порожній клітинці. Нехай це клітинки (a, c) та (d, b). Тоді $r_a + c_b < 99$, $r_a + c_c = 99$ та $r_d + c_b = 99$, звідки $r_d + c_c > 99$, що неможливо, оскільки у клітинці (d, c) на початку гри було лише 99 камінців. Таким чином, гра закінчиться рівно через $\frac{99n^2}{n} = 9n$ ходів, оскільки за один хід з дошки знімається n камінців. Тому перший гравець виграє тоді й лише тоді, коли n непарне.

3. Чотирикутники $BZDX$ та $ABZC$ вписані (рис. 7), тому $\angle ZDY = \angle ZBA = \angle ZCY$. Звідси чотирикутник $ZDCY$ вписаний, а отже $\angle ACB = \angle WZV$. Тому $AB = VW$ як хорди, що стягують рівні вписані кути.

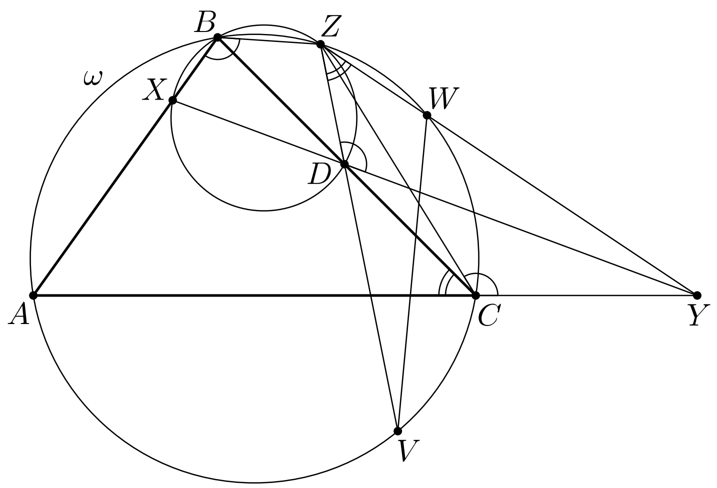

Рис. 7.

4. *Відповідь:* $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2016} = k$, де $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2016\}$ довільне.

Оскільки $ia_i + ja_j$ та $(i+j)a_j$ діляться на $i+j$, то $i(a_i - a_j)$ ділиться на $i+j$. При $j = i-1$ дістаємо, що $i(a_i - a_{i-1})$ ділиться на $2i-1$, а тому $a_i - a_{i-1}$ ділиться на $2i-1$, оскільки числа i та $2i-1$ взаємно прості. При $2i - 1 \geq 2017$ звідси випливає, що $a_i = a_{i-1}$, бо $|a_i - a_{i-1}| \leq 2016$. Отже, $a_{1008} = a_{1009} = \ldots = a_{2016}$.

При $1 \leq i \leq 1008$ та $j = 2017 - i$ дістаємо, що $i(a_i - a_{2017-i})$ ділиться на 2017, а оскільки 2017 — просте число та $|a_i - a_{2017-i}| \leq 2016$, то $a_i = a_{2017-i}$. Тому всі члени послідовності є рівними. Залишається зробити перевірку.

5. *Відповідь:* $f(n) = n$.

Нехай функція f задовольняє умову задачі. Покажемо індукцією за $n \geq 1$, що $f(n) = n$. При $n = 1$ маємо $0 < f(1)f(f(1)) < 2$, отже $f(1) = 1$. Припустимо, що $f(n) = n$ при всіх $n < k$, та доведемо, що $f(k) = k$.

Якщо $f(k) = m \leq k-1$, то $f(f(k)) = f(m) = m$ та $f(k)f(f(k)) = m^2 \leq (k-1)^2$, що суперечить умові. Якщо $f(k) = M \geq k+1$, то $(k+1)f(M) \leq f(k)f(f(k)) < k^2 + k$, звідки $f(M) < k$. Тоді $f(f(M)) = f(M) < k$ та $f(M)f(f(M)) < k^2 \leq (M-1)^2$, знову дістали суперечність з умовою. Отже, $f(k) = k$.

Таким чином, $f(n) \equiv n$ та залишається зробити перевірку.

6. *Відповідь:* таких чисел не існує.

Нехай $[\sqrt{n}\,] = a$. Тоді $a^2 \leq n < (a+1)^2$, звідки $n = a^2 + b$, де $0 \leq b \leq 2a$. Припустимо, що $n^2 + 1 = (a^2+b)^2 + 1$ ділиться на $[\sqrt{n}\,]^2 + 2 = a^2 + 2$. Оскільки $(a^2+b)^2$ та $(-2+b)^2$ дають однакові остачі при діленні на a^2+2, то $(b-2)^2 + 1$ теж ділиться на $a^2 + 2$. Але $-2 \leq b - 2 \leq 2a - 2$, тому

$$0 < (b-2)^2 + 1 \leq \max\bigl(2^2, (2a-2)^2\bigr) + 1 < 4(a^2+2).$$

Отже, якщо $(b-2)^2 + 1 = k(a^2+2)$, то $k = 1$, $k = 2$ або $k = 3$. Розглянемо ці випадки окремо.

Якщо $k = 1$, то $(b-2)^2 - a^2 = 1$. Ця рівність можлива лише при $(b-2)^2 = 1$ та $a^2 = 0$, проте $a = [\sqrt{n}\,] \geq 1$, суперечність.

Якщо $k = 2$, то $(b-2)^2 + 1 = 2(a^2+2)$, тобто $(b-2)^2 = 2a^2 + 3$. Ліва частина цієї рівності при діленні на 8 дає одну з остач 0, 1 або 4, а права — одну з остач 3 або 5, тому рівність неможлива.

Якщо $k = 3$, то $(b-2)^2 + 1 = 3(a^2+2)$. Звідси $(b-2)^2$ при діленні на 3 дає остачу 2, що неможливо.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* 26 осіб.

Виберемо п'ять студентів, по одному з кожного курсу. Оскільки кількість придуманих ними задач різна, то ці студенти придумали не менше, ніж $1+2+3+4+5 = 15$ задач. Тоді інші 25 студентів придумали не більше, ніж $40 - 15 = 25$ задач. Тому кожен з них придумав рівно по одній задачі, і серед обраних студентів один придумав одну задачу, отже, усього по одній задачі придумали 26 осіб.

Таке справді можливо. Наприклад, кожний студент придумав стільки задач, як номер його курсу, причому з першого курсу у складанні задач взяли участь 26 студентів, а з інших курсів — по одному студенту.

1.2. *Відповідь:* 1.

Оскільки $y(0) = b$, то точка B має координати $(0; b)$. З умови задачі випливає, що точки A та B симетричні відносно прямій $y = x$. Отже, точка A має координати $(b; 0)$. Таким чином, число b і шукана довжина c відрізка OC є коренями квадратного рівняння $x^2 + ax + b = 0$. За теоремою Вієта $bc = b$. Оскільки $b \neq 0$, то $c = 1$.

1.3. Нехай точка K — середина діагоналі AC (рис. 8). Оскільки точка B лежить всередині кола з діаметром AC, то $BK < \frac{1}{2}AC$. Помітимо, що $KM = \frac{1}{2}AD$. Маємо $BM \le BK + KM < \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AD$. Звідси $AC + AD > 2BM$.

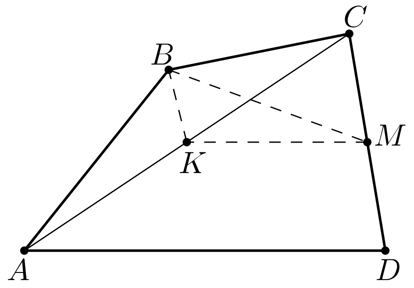

Рис. 8.

1.4. Для доведення достатньо помітити, що якщо пара $(n; n+1)$ степенева, то пара

$$\big(4n(n+1); 4n(n+1)+1\big)$$

також є степеневою.

2.1. *Відповідь:* $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

З умови випливає, що $x^2 < 1$. Звідси $-1 < x < 1$. Рівність $\{x^2 + 2x + 1\} = x^2$ можлива лише за умови, що $2x$ — ціле число. Оскільки $-2 < 2x < 2$, то $2x \in \{-1; 0; 1\}$, відповідно $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$. Перевірка показує, що числа $-\frac{1}{2}$, 0 та $\frac{1}{2}$ — корені рівняння.

2.2. Розглянемо довільний трикутник ABC з периметром P і площею S. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника ABC з коефіцієнтом подібності k. Тоді периметр і площа цього трикутника відповідно дорівнюють kP та k^2S. Рівність $kP = k^2S$ виконується при $k = \frac{P}{S}$. Таким чином, для будь-якого трикутника знайдеться подібний йому трикутник, периметр і площа якого чисельно збігаються.

2.3. Маємо

$$2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2b^2(a - b) \ge 4 + a^2b^2(a - b) \ge 4.$$

2.4. *Відповідь:* існують.

Наприклад, умову задовольняють числа $11!$, $2\cdot 11!$, $3\cdot 11!$, $4\cdot 11!$, $5\cdot 11!$, $6\cdot 11!$ Добуток і сума будь-яких двох із цих чисел мають вигляд $(11!)^2mn$ та $11!(m+n)$ відповідно. Оскільки $m + n \le 11$, то $(11!)^2mn$ ділиться на $11!(m+n)$.

3.1. Нехай $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = a$, де a — раціональне число. Якщо $a = 0$, то $x = 0$ та $\dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = 0$ — раціональне число. Надалі будемо вважати, що $a \neq 0$. Тоді $x \neq 0$ та

$$\frac{1}{a} = \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x},$$

звідки $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} - 1$. Отже,

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 1 = \frac{1 - 2a}{a^2}$$

— ненульове раціональне число, а тому $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ — теж раціональне число.

3.2. *Відповідь:* (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

З першого рівняння системи випливає, що $x \le 1$, $y \le 1$, $z \le 1$. За цих умов виконуються нерівності $x^3 \le x^2$, $y^3 \le y^2$, $z^3 \le z^2$. Звідси $x^3 + y^3 + z^3 \le x^2 + y^2 + z^2$. Рівність можлива, якщо одночасно $x^3 = x^2$, $y^3 = y^2$, $z^3 = z^2$.

3.3. Через точку O проведемо пряму, паралельну доAD. Вона перетне сторони AB та CD у їх серединах P та Q відповідно (рис. 9). Оскільки MQ — серединний перпендикуляр до відрізка CD, то кут QMP теж прямий. Отже, MO — медіана прямокутного трикутника PMQ, проведена до гіпотенузи. Тому $\angle AMO = \angle MPO = \angle MAD$.

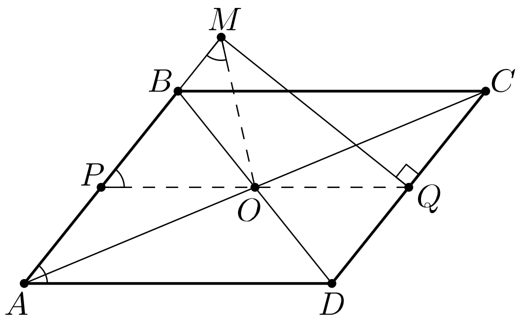

Рис. 9.

3.4. *Відповідь:* (3; 2).

Очевидно, що $x = 1$, $y = 1$ не є розв'язком рівняння. При будь-яких інших значеннях x та y значення виразу $4xy - 5$ є додатним. Це означає, що розв'язок слід шукати за умови $x > y$. Запишемо дане рівняння у вигляді $x - y = \frac{4xy-5}{x^2+xy+y^2}$. Оскільки $x^2 + xy + y^2 \ge 3xy$, то $\frac{4xy-5}{x^2+xy+y^2} < \frac{4xy}{3xy} = \frac{4}{3}$. Тому $0 < x - y < \frac{4}{3}$, звідки $x - y = 1$. Підставимо у вихідне рівняння $x = y + 1$. Дістанемо $y^2 + y - 6 = 0$. Звідси $y = 2$ та $x = 3$.