Чотирнадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

З 8 по 11 травня цього року в місті Києві відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8-10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у дитячому навчально-оздоровчому таборі "Дніпро", у мальовничому передмісті Києва — Конча-Заспі.

Цього року у фестивалі взяли участь українські команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, Львівського фізико-математичного ліцею, гімназії м. Конотоп та київські команди Українського фізико-математичного ліцею, гімназії №178, ліцею "Наукова зміна" та, звісно, ліцею "Лідер". Також у фестивалі взяв участь один учень ДБОЗ СЗШ № 2086 (м. Москва, Росія).

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці усної олімпіади (10 клас).

I місце: Пушкін Денис ("Наукова зміна"), Ульяніч Михайло (ХФМЛ №27).

II місце: Бондаренко Денис ("Лідер"), Нарцев Денис (УФМЛ).

III місце: Уразовський Андрій (ХФМЛ №27), Олексіюк Іван ("Лідер"), Пономарьов Ростислав (ХФМЛ №27), Нгуен Чунг Кионг ("Лідер"), Кожевніков Роман (УФМЛ), Косюк Іван ("Лідер").

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Ніколаєв Арсеній (СЗШ №2086, Москва), Нго Нгок Тхай Шон (ХФМЛ №27).

II місце: Папка Віталій (ЛФМЛ), Вєпрік Микита (ХФМЛ №27), Гарбузова Аліна (ХФМЛ №27), Картишев Єгор (ХФМЛ №27).

III місце: Сагайдак Данило (ЛФМЛ), Сікорський Денис ("Лідер"), Швайко Софія (АГ №45, Харків), Крупчицький Олексій (ХФМЛ №27), Черемшинський Сергій ("Лідер"), Іванчик Георгій ("Лідер"),

[1] механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка
[2] Інститут математики НАН України

9 клас

I місце: Кравець Анна ("Лідер"), Решетніков Всеволод ("Лідер").

II місце: Руденко Олег (ХФМЛ №27), Шевченко Ольга (АГ №45, Харків), Фам Хоанг Вієт (ХФМЛ №27), Гарагата Альона (ХФМЛ №27).

III місце: Здановська Юлія (УФМЛ), Яцук Анатолій (ЛФМЛ), Ян Аліна (УФМЛ), Гончаров Дмитро (ХФМЛ №27), Бойко Володимир (ДОЛІФМП), Анпілогов Марк ("Лідер").

10 клас

I місце: Тумак Олександра (ЛФМЛ), Пономарьов Ростислав (ХФМЛ №27).

II місце: Бабієнко Ілля ("Лідер"), Вертелецький Владислав (УФМЛ), Ульяніч Михайло (ХФМЛ №27).

III місце: Уразовський Андрій (ХФМЛ №27), Європін Богдан ("Лідер") Кожевніков Роман (УФМЛ), Нарцев Денис (УФМЛ), Бондаренко Денис ("Лідер") Сердюк Максим (ХФМЛ №27), Трєскунов Денис ("Лідер") Уфімцева Софія (АГ №45, Харків), Шамрай Денис ("Лідер").

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Довести, що існує нескінченно багато пар дійсних чисел (x, y) таких, що

$$\sqrt{1+2x-xy}+\sqrt{1+2y-xy}=2.$$

2. У компанії з 6 ховрахів у кожного ховраха рівно 4 друга. Чи завжди можна розбити компанію на дві групи по 3 ховраха так, аби в кожній групі всі ховрахи були друзями?

3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 100, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?

4. Нехай O — точка перетину висот AD та BE рівностороннього трикутника ABC. На відрізках AO та BO відмітили точки $K \neq O$ та $L \neq O$ відповідно так, що пряма KL ділить периметр трикутника ABC навпіл. Нехай F — точка перетину прямих EK та DL. Довести, що O — центр описаного кола трикутника DEF.

5. Том пофарбував круговий паркан з $2n \geq 6$ секцій таким чином, що кожну секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. При яких n Том може перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів?

9 клас

1. Див. задачу 8.1.

2. У компанії з 7 ховрахів у кожного ховраха рівно 4 друга. Чи завжди можна виділити з компанії дві неперетинні групи по 3 ховраха так, аби в кожній групі всі ховрахи були друзями?

3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 50, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?

4. Див. задачу 8.4.
5. Див. задачу 8.5.

10 клас

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+2x-xy}+\sqrt{1+2y-xy}=2$.
2. Див. задачу 9.2.
3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 30, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?
4. Див. задачу 8.4.
5. Див. задачу 8.5.

Автори задач: В. Брайман (8.1=9.1∼10.1, 8.3∼9.3∼10.3, 8.4=9.4=10.4), О. Руденко (8.2∼9.2=10.2, 8.5=9.5=10.5).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Знайдіть усі натуральні числа k такі, що добуток цифр десяткового запису k дорівнює $\frac{25}{8}k-211$.
2. Нехай x — дійсне число таке, що $0<x<\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\cos^2 x\operatorname{ctg} x+\sin^2 x\operatorname{tg} x\geq 1$.
3. Коло ω_1 знаходиться всередині кола ω_2, причому дотикається до нього в точці A. Через точку A провели пряму, яка вдруге перетинає ω_1 у точці B, а ω_2 — у точці C. Дотична до ω_1 у точці B перетинає ω_2 у точках D і E. Дотичні до ω_1, проведені з точки C, дотикаються до ω_1 у точках F та G. Доведіть, що точки D, E, F та G лежать на одному колі.
4. У Андрійка є багато одиничних квадратів, деякі з яких білі, а деякі — чорні. Андрійко хоче зібрати з них квадрат $n\times n$ так, щоб кожен з прямокутників $k\times m$ $(k>1, m>1)$ всередині нього містив кутові клітинки обох кольорів. Яке найбільше значення може набувати n?
5. Доведіть, що для кожного ірраціонального a існують ірраціональні b і c такі, що числа $a+b$ і ac є раціональними, а числа ab і $a+c$ — ірраціональними.
6. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних x та y виконується співвідношення $f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4yf(x)$.

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[3]

1.1. Після того, як був побудований графік функції $y=x^2+bx+c$, вісь ординат стерли (рис. 1). Відомо, що відстані між сусідніми відміченими точками дорівнює 1. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена x^2+bx+c.

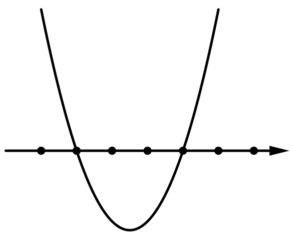
Рис. 1.

1.2. На дошці написане число 1. Якщо на дошці написане число a, його можна замінити будь-яким натуральним числом вигляду $a+n$, де n взаємно просте з a і $10\leq n\leq 20$. Чи можна через декілька таких операцій отримати на дошці число 18! (18 факторіал)?

[3] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

1.3. Діагоналі AC і BD рівнобедреної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються у точці O; відомо також, що у трапецію можна вписати коло. Доведіть, що $\angle BOC > 60°$.
1.4. На прямій l послідовно відмітили точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $\ldots$ так, що $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = 2$, $A_3A_4 = 3$, $A_4A_5 = 4$, $\ldots$ На відрізках A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, $\ldots$ як на сторонах побудовано квадрати, розташовані в одній півплощині відносно прямої l. Доведіть, що центри всіх цих квадратів належать одній параболі.

2 тур

2.1. Скінченною чи нескінченною є множина натуральних чисел, які є точними квадратами, мають суму цифр 9 і запис яких не закінчується цифрою 0?
2.2. Точки M, N, K — середини сторін AB, BC та CA трикутника ABC відповідно. Точки D, P, Q — середини ламаних BAC, ABC та BCA відповідно (рис. 2). Доведіть, що прямі MQ, ND та KP перетинаються в одній точці.

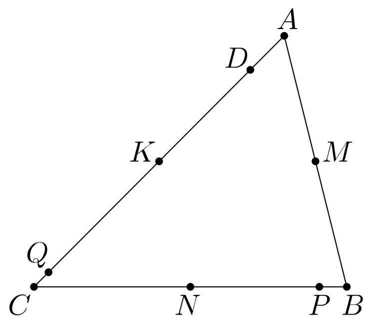

Рис. 2.

2.3. Хлопчик малює кола, ділить кожне з них радіусами на три частини, а потім розфарбовує їх у три різні кольори. Чи може він, маючи 24 кольорових олівця, отримати такий набір розфарбованих кіл, щоб на них кожні два кольори зустрічалися разом рівно один раз?
2.4. Доведіть, що серед трьохелементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, 63\}$ підмножин з сумою елементів, меншою за 95, менше, ніж із сумою елементів, більшою за 95.

3 тур

3.1. Чи існують непарні цілі числа x, y і z, що задовольняють рівність
$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2?$$
3.2. У гострокутному трикутнику ABC кут A дорівнює $60°$. На стороні AB взято точку K так, що $AK = \frac{1}{2}AC$. Знайдіть BK, якщо відстань від центра описаного навколо ABC кола до сторони AC дорівнює a.
3.3. Точка M лежить усередині прямокутника $ABCD$. Доведіть, що площа цього прямокутника не перевищує величини $AM \cdot CM + BM \cdot DM$.
3.4. На дошці записали 100 чисел. Потім збільшили кожне число на 1 і помітили, що добуток усіх 100 чисел не змінився. Після цього знову збільшили кожне число на 1, і знову добуток усіх чисел не змінився, і так далі. Всього повторили цю операцію k разів, і всі k разів добуток чисел не змінювався. Знайдіть найбільше можливе значення k.

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

8.1. Якщо $y = -x$, то рівняння набуває вигляду
$$\sqrt{1+2x+x^2} + \sqrt{1-2x+x^2} = 2, \text{ або } |1+x| + |1-x| = 2.$$
При $-1 \le x \le 1$ маємо $|1+x| + |1-x| = 1 + x + 1 - x = 2$. Отже, рівність виконується зокрема для всіх пар чисел $(x, -x)$, де $-1 \le x \le 1$.

8.2. *Відповідь:* так.

У кожного ховраха є лише один ворог, тому ховрахів можна розбити на три пари так, що ховрахи у кожній парі ворогують між собою. Тепер достатньо взяти у кожну групу по одному ховраху з цих пар.

8.3. *Відповідь:* так.

Нехай $N > 100$ — дане число. Позначимо a те з чисел 15, 30, яке дає таку ж остачу при діленні на 2, як N, b — те з чисел 10, 20, 30, яке дає таку ж остачу при діленні на 3, як N, c — те з чисел 6, 12, 18, 24, 30, яке дає таку ж остачу при діленні на 5, як N. Тоді $a+b+c \leq 90$ та $d = N-a-b-c > 10$ ділиться на 2, на 3 та на 5, тобто ділиться на 30. Числа a, b, c, d є шуканими, оскільки кожні два з них мають спільний дільник 2, 3 або 5.

8.4. *I спосіб.* Нехай пряма KL перетинає сторони AC та BC у точках G та H відповідно. Доведемо, що $GK = KL = LH$. Справді, проведемо $GT \perp AD$ (рис. 3). Оскільки

$$AG + GC + CD = GC + CD + DH = \tfrac{1}{2}P_{ABC},$$

то $AG = DH$. Але AGT — прямокутний трикутник з кутом $\angle GAT = 30°$, тому $GT = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}DH$. З подібних трикутників KGT та KHD дістаємо, що $GK = \frac{1}{2}KH$, тобто $GK = \frac{1}{3}GH$. Аналогічно $LH = \frac{1}{3}GH$.

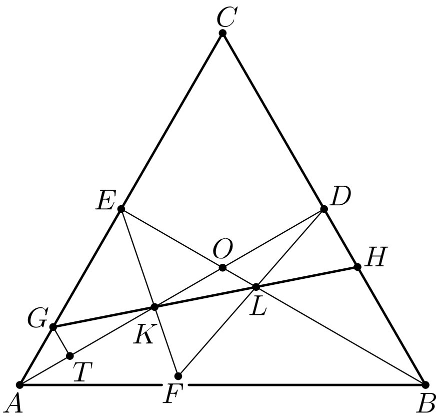

Рис. 3.

Оскільки EK та DL є медіанами прямокутних трикутників GEL та KDH, то $EK = KL = LD$. Тоді

$$\begin{aligned}\angle KFL =& 180° - \angle FKL - \angle FLK = \\ =& 180° - 2(\angle KLO + \angle LKO) = 180° - 2(180° - \angle KOL) = 60°\end{aligned}$$

(ми використали, що $\angle FKL = 2\angle KLO$ та $\angle FLK = 2\angle LKO$ як зовнішні кути трикутників EKL та KLD). Отже, $\angle EFD = \angle KFL = 60° = \frac{1}{2}\angle EOD$, а тому точка F належить колу з центром O, яке проходить через точки D та E.

II спосіб. Нехай пряма KL перетинає сторони AC та BC у точках G та H відповідно, M — середина AB. Оскільки $AG = DH$ (див. I спосіб), то при повороті навколо точки M на 120°, який переводить DB у AE, точка H перейде у точку G. Тому GMH — рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. Звідси $\angle MAK = \angle MGK = 30°$, тому чотирикутник $AGKM$ вписаний та $\angle MKL = \angle MAG = 60°$. Аналогічно $\angle MLK = 60°$. Отже, трикутник KLM рівносторонній. При повороті навколо точки M на 60° точки E, L, D переходять у точки A, K, E, тому $\angle OKF = \angle AKE = \angle ELD = 180° - \angle OLF$. Тому чотирикутник $OKFL$ вписаний.

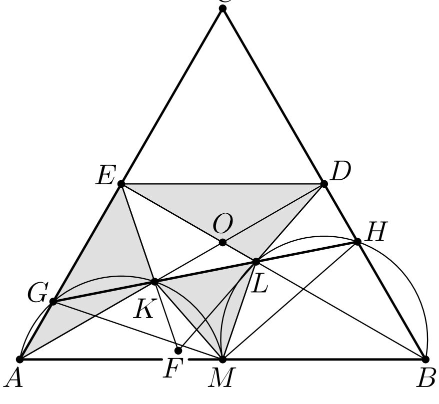

Рис. 4.

Отже, $\angle EFD = \angle KFL = 180^\circ - \angle KOF = 60^\circ = \frac{1}{2}\angle EOD$, а тому точка F належить колу з центром O, яке проходить через точки D та E.

8.5. *Відповідь:* при всіх $n \geq 3$.
Занумеруємо секції паркану та будемо описувати розфарбування набором чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$, де кожне з чисел дорівнює 1, 2, 3 або 4. Покажемо, що Том може нескінченно багато разів перефарбовувати паркан при всіх $n \geq 3$.

Нехай $n \geq 3$ непарне. Пофарбуємо та будемо перефарбовувати паркан таким чином:

$$\begin{gathered}
\big(1, 1, \underline{1, 2, 3}, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, \ldots, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3\big)\\
\downarrow\\
\big(1, 1, 4, 4, \underline{4, 3, 2}, 2, 3, 3, 2, 2, \ldots, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3\big)\\
\downarrow\\
\big(1, 1, 4, 4, 1, 1, \underline{1, 2, 3}, 3, 2, 2, \ldots, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3\big)\\
\downarrow\\
\big(1, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 4, \underline{4, 3, 2}, 2, \ldots, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3\big)\\
\downarrow\\
\ldots\\
\downarrow\\
\big(\underline{1}, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 4, \ldots, 4, 4, 1, 1, 4, 4, \underline{4, 3}\big)
\end{gathered}$$

Нове розфарбування відрізняється від початкового лише зсувом та зміною кольорів (4, 3, 1 замість 1, 2, 3 відповідно), тому перефарбовувати паркан можна як завгодно багато разів.

При $n = 4$ розфарбувати та перефарбовувати секції можна так:

$$\big(\underline{1}, 1, \underline{1, 2, 3}, 3, \underline{3, 4}\big) \to \big(\underline{2, 1, 4}, 4, \underline{4, 3, 2}, 2\big) \to \big(\underline{3}, 3, \underline{3, 4, 1}, 1, \underline{1, 2}\big) \to \ldots$$

Покажемо, що якщо Том може нескінченно багато разів перефарбовувати паркан при $n = m$, то він може це робити і при $n = 2m$. Справді, Том може повторити двічі початкове розфарбування для $n = m$, а далі кожне перефарбовування, яке він здійснював би при $n = m$, він буде виконувати двічі з діаметрально протилежними трійками секцій. Тоді після кожної пари перефарбовувань розфарбування паркану з $4m$ секцій буде двічі повторювати відповідне розфарбування паркану з $2m$ секцій. Отже, перефарбовувати паркан можна буде як завгодно багато разів.

З доведеного випливає, що Том може нескінченно багато разів перефарбовувати паркан, якщо $n = (2k+1)2^l$, де $k \geq 1$ та $l \geq 0$, або $n = 4 \cdot 2^l$, де $l \geq 0$, тобто при всіх $n \geq 3$.

9.2. *Відповідь:* так.
I спосіб. У кожного ховраха є рівно два ворога, тому ховрахів можна розставити по колам так, аби обидва ворога кожного ховраха були його сусідами по колу. У кожному колі буде не менше 3 ховрахів, тому утвориться одне коло з 7 ховрахів або два кола з 3 та 4 ховрахів. У кожному з цих випадків можна взяти в одну групу ховрахів, позначених на рис. 5 цифрою 1, а в іншу — ховрахів, позначених цифрою 2.

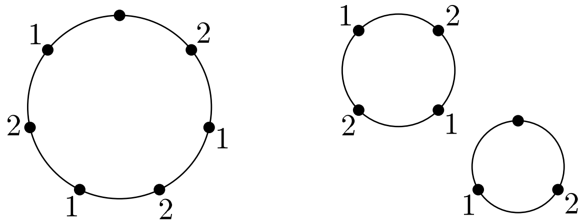

Рис. 5.

II спосіб. Розглянемо двох ховрахів, які є друзями. Кожен з них має ще трьох друзів серед інших п'яти ховрахів, отже у них є спільний друг. Таким чином, існують троє ховрахів, серед яких кожні два дружать. Назвемо цих ховрахів добрими, а інших злими. Існує $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ пар ховрахів-друзів. Зокрема існує 3 пари, в яких обидва ховрахи добрі, та 6 пар, в яких один ховрах добрий, а інший злий, адже у кожного доброго ховраха є двоє друзів серед злих ховрахів. Отже, існує 5 пар друзів, в яких обидва ховрахи злі. Але тоді серед злих ховрахів є лише одна пара ховрахів, які не дружать, а отже знайдеться трійка злих ховрахів, кожні двоє з яких дружать.

9.3. *Відповідь:* так.

Покажемо, що кожне число $N \geq 32$ можна подати як суму 4 чисел потрібним чином. Якщо N складене, то його можна подати у вигляді $N = ab$, де $1 < a \leq b$. Якщо $b < 4$, то $N \leq b^2 < 16$, суперечність. Отже, $b \geq 4$ та $N = a + a + a + (b-3)a$. Нехай $N \geq 32$ просте. Тоді N не ділиться на 2 та на 3. Звідси $N = 6k+1$, де $k \geq 6$, і тоді $N = 6 + 10 + 15 + 6(k-5)$, або $N = 6k+5$, де $k \geq 6$, і тоді $N = 10 + 10 + 15 + 6(k-5)$.

10.1. *Відповідь:* $(x, -x)$, де $-1 \leq x \leq 1$, та $(x, 4-x)$, де $1 \leq x \leq 3$.

Позначимо $\sqrt{1+2x-xy} = a$, $\sqrt{1+2y-xy} = b$. Тоді $a+b = 2$ та $a^2-b^2 = 2x-2y$, звідки $a-b = x-y$, $2a = 2+x-y$. Отже, $2\sqrt{1+2x-xy} = 2+x-y$, $4(1+2x-xy) = (2+x-y)^2$. Після розкриття дужок та зведення подібних дістанемо $x^2+2xy+y^2-4x-4y = 0$, або $(x+y)(x+y-4) = 0$.

Якщо $x+y = 0$, то $y = -x$ та вихідне рівняння набуває вигляду

$$\sqrt{1+2x+x^2} + \sqrt{1-2x+x^2} = 2, \text{ або } |1+x| + |1-x| = 2.$$

Маємо $|1+x| + |1-x| \geq 1+x+1-x = 2$, а рівність досягається, коли $1+x \geq 0$ та $1-x \geq 0$, тобто при $-1 \leq x \leq 1$.

Якщо $x+y = 4$, то $y = 4-x$ та вихідне рівняння набуває вигляду

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{9-6x+x^2} = 2, \text{ або } |x-1| + |3-x| = 2.$$

Маємо $|x-1| + |3-x| \geq x-1+3-x = 2$, а рівність досягається, коли $x-1 \geq 0$ та $3-x \geq 0$, тобто при $1 \leq x \leq 3$.

10.3. *Відповідь:* ні.

Покажемо, що число 31 розкласти потрібним чином не можна. Справді, кожен доданок у розкладі має містити хоча б два різні прості дільники, інакше всі доданки мали б спільний дільник та вся сума ділилася б на цей дільник. Звідси випливає, що кожен доданок не менший за 6, а кожен непарний доданок не менший за 15. Оскільки принаймні один доданок має бути непарним, то сума чотирьох доданків не менша за

$6 + 6 + 6 + 15 = 33$.

Зауваження. З розв'язань задач 9.3 та 10.3 випливає, що 31 — найбільше число, яке не можна подати як суму 4 чисел потрібним чином.

Усна математична олімпіада

1. *Відповідь:* 72 та 88.

Нехай $k = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ — десятковий запис числа k, який складається з n цифр, $P(k)$ — добуток цифр числа k.

Оскільки $P(k) = \frac{25}{8}k - 211 \geq 0$, то $k \geq \frac{8}{25} \cdot 211 = \frac{1688}{25} > 66$. З іншого боку, $P(k) \leq a_n \cdot 9^{n-1} \leq a_n \cdot 10^{n-1} \leq k$, тому $\frac{25}{8}k - 211 \leq k$, або $k \leq \frac{8}{17} \cdot 211 = \frac{1688}{17} < 100$. Число $P(k)$ є цілим, тому k ділиться на 8. Якщо k ділиться на 16, то $P(k) = \frac{25}{8}k - 211$ є непарним, що неможливо, бо остання цифра числа k парна. Залишилося перевірити всі числа між 66 та 100, які діляться на 8 та не діляться на 16, тобто 72 та 88. Обидва ці числа задовольняють умову.

2. Зауважимо, що $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$. Звідси

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2(\cos x \sin x)^2 \geq \tfrac{1}{2}.$$

Тоді $\cos^4 x + \sin^4 x \geq \sin x \cos x$, а оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x \cos x > 0$. Отже,

$$\cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin^2 x \operatorname{tg} x = \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin x \cos x} \geq 1.$$

3. Проведемо дотичну CH до кола ω_2 (рис. 6). При гомотетії з центром у точці A, яка переводить коло ω_1 у коло ω_2, пряма DE переходить у пряму CH, тому $DE \parallel CH$ і точка C є серединою дуги DE. Тоді $CE = CD$ та $\angle CEB = \angle EDC = \angle EAC$. Отже, трикутники AEC та EBC подібні, звідки $\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{AC}$. Тому $CB \cdot AC = CE^2 = CD^2$. Але за властивістю дотичної та січної $CB \cdot CA = CG^2 = CF^2$. Таким чином, $CD = CE = CF = CG$, а тому точки D, E, F, G лежать на колі з центром у точці C.

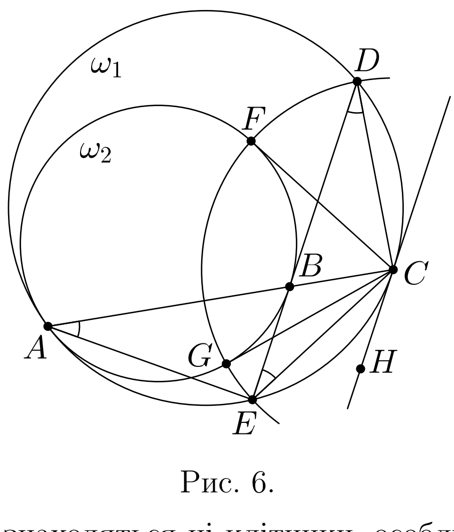

Рис. 6.

4. *Відповідь:* $n = 4$.

Можливий варіант для $n = 4$ зображений на рис. 7. Розглянемо випадок $n = 5$. Без обмеження загальності принаймні три клітинки у першому рядку є чорними. Назвемо три стовпчика квадрата, у яких знаходяться ці клітинки, особливими. Якщо в деякому рядку, крім першого, в особливих стовпчиках є дві чорні клітинки, то існує чотирикутник з усіма чорними кутами.

Отже, в кожному рядку, крім першого, в особливих стовпчиках принаймні дві клітинки мають бути білими. Але тоді на перетині деяких двох рядків та деякої пари особливих стовпчиків знаходяться білі клітинки та існує чотирикутник з усіма білими кутами. Таким чином, шуканого квадрата розміру 5×5 не існує.

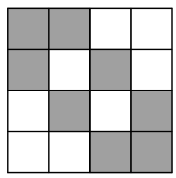

Рис. 7.

5. Нехай a — ірраціональне число.

Якщо $a^2 \notin \mathbb{Q}$, то візьмемо $b = -a$. У цьому випадку $a + b = 0 \in \mathbb{Q}$, $ab = -a^2 \notin \mathbb{Q}$.

Якщо ж $a^2 \in \mathbb{Q}$, то візьмемо $b = a^2 - a$. Тоді $a + b = a^2 \in \mathbb{Q}$, $ab = a^2(a-1) \notin \mathbb{Q}$, оскільки $a^2 \in \mathbb{Q}$, причому $a \neq 0$, та $a - 1 \notin \mathbb{Q}$.

Тепер розглянемо $c = \frac{1}{a}$ або $c = \frac{2}{a}$. Тоді ac дорівнює 1 або 2, в обох випадках ac є раціональним числом. Помітимо, що $a + c = \frac{a^2+1}{a}$ або $a + c = \frac{a^2+2}{a}$. Оскільки $\frac{a^2+2}{a} - \frac{a^2+1}{a} = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Q}$, то принаймні одне з чисел $\frac{a^2+1}{a}$ та $a + c = \frac{a^2+2}{a}$ є ірраціональним.

6. *Відповідь:* $f(x) \equiv 0$ та $f(x) \equiv x^2$.

Покладемо $y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$. Тоді

$$f\left(\tfrac{x^2+f(x)}{2}\right) = f\left(\tfrac{x^2+f(x)}{2}\right) + 2(x^2 - f(x)) \cdot f(x),$$

звідки $\big(x^2 - f(x)\big)f(x) = 0$. Отже, для кожного дійсного числа x маємо $f(x) = 0$ або $f(x) = x^2$. Окремо відмітимо, що $f(0) = 0$.

Якщо $f(x) = 0$, то з умови випливає, що $f(y) = f(x^2 - y)$. При $x = 0$ звідси дістаємо, що $f(y) = f(-y)$. Якщо $f(y) \neq 0$ та $f(-y) \neq 0$, то $y^2 = (x^2 - y)^2 = (x^2 + y)^2$, звідки $x = 0$. Таким чином, якщо $f(y) \neq 0$ для деякого y, то $f(x) = 0$ лише при $x = 0$. Тому або $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, або $f(x) \equiv x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Залишається перевірити, що обидві функції задовольняють умову задачі.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* 9.

Позначимо x_1, x_2 корені тричлена $x^2 + bx + c$. Помітимо, що $|x_1 - x_2| = \sqrt{D}$, де D — дискримінант тричлена. З рис. 1 видно, що $|x_1 - x_2| = 3$. Тоді $D = 9$.

1.2. *Відповідь:* можна.

Помітимо, що число $18! - 19$ закінчується цифрою 1. Будемо додавати до числа на дошці 10. При цьому завжди буде виходити число, яке закінчується цифрою 1, а отже є взаємно простим із числом 10, так що операція можлива. Зрештою на дошці з'явиться число $18! - 19$. Ми додамо до нього 19 і одержимо $18!$

1.3. Без обмеження загальності BC — менша основа трапеції. Оскільки $2AB = AB + CD = BC + AD < 2AD$, то $AB < AD$. Звідси $AC < AB + BC < AD + BC$. На промені AD відмітимо точку M так, що $CM \parallel BD$ (рис. 8). Тоді $\angle ACM = \angle BOC$, $CM = BD = AC$, $AM = AD + DM = AD + BC$. Оскільки $AM > AC = CM$, то AM — найбільша сторона трикутника ACM. Звідси випливає, що $\angle ACM > 60°$.

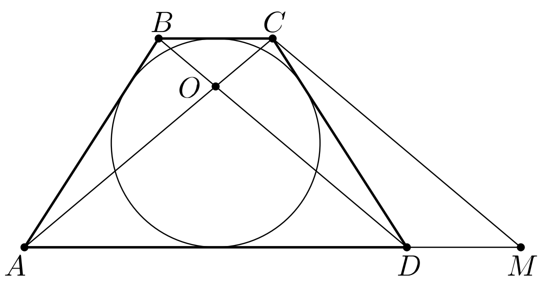

Рис. 8.

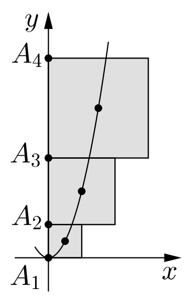

Рис. 9.

1.4. Виберемо систему координат так, щоб початок координат збігався із точкою A_1, а вісь ординат — з прямою l (рис. 9). Тоді абсциса x_i центра i-го квадрата дорівнює $i/2$, а ордината y_i дорівнює $1 + 2 + \ldots + (i-1) + i/2 = i^2/2$. Оскільки $y_i = 2x_i^2$, то центри всіх квадратів належать параболі $y = 2x^2$.

2.1. *Відповідь:* нескінченною.
Оскільки всі числа вигляду $(10^n+2)^2 = 10^{2n}+4\cdot 10^n+4$, $n \geq 1$, мають суму цифр 9, то розглянута множина є нескінченною.

2.2. Покажемо, що промінь ND — бісектриса кута $\angle MNK$. Оскільки $CD = \frac{AC+AB}{2}$ та $CK = \frac{AC}{2}$, то $KD = CD - CK = \frac{AB}{2}$. Тоді $KD = KN$, а отже $\angle KND = \angle KDN$. Крім того, $\angle KDN = \angle DNM$, бо $MN \parallel AC$. Таким чином, $\angle KND = \angle DNM$ (рис. 10). Аналогічно можна довести, що промені MQ та KP — бісектриси кутів KMN та MKN відповідно. Тому прямі MQ, ND та KP перетинаються в одній точці.

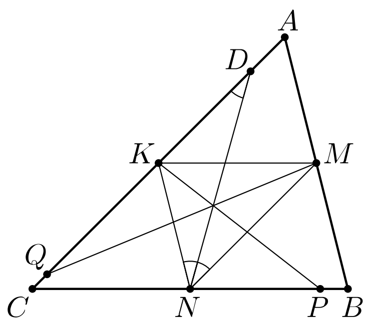

Рис. 10.

2.3. *Відповідь:* не може.
Припустимо, що такий набір кіл існує. Розглянемо всі кола, які містять якийсь один із кольорів, наприклад, червоний. Тоді кожен з інших 23 кольорів зустрічається на цих колах рівно один раз. Оскільки на кожному з цих кіл одна частина зафарбована в червоний колір, а дві частини — в інші кольори, то для розфарбовування цих кіл крім червоного потрібна парна кількість кольорів, тоді як насправді їх 23, суперечність.

2.4. Кожній множині $\{a, b, c\}$ із сумою елементів, меншою за 95, поставимо у відповідність множину $\{64-a, 64-b, 64-c\}$, сума елементів якої більша за 97. Дістали взаємно-однозначну відповідність між усіма трьохелементними підмножинами множини $\{1, 2, \ldots, 63\}$, сума елементів яких менша за 95, та деякими трьохелементними підмножинами цієї множини, сума елементів яких більша за 95.

3.1. *Відповідь:* не існують.
Після розкриття дужок і зведення подібних одержимо $x^2 + xy + xz = yz$, звідки $(x+y)(x+z) = 2yz$. Якщо x, y та z непарні, то ліва частина ділиться на 4, а права ні, суперечність.

3.2. *Відповідь:* $a\sqrt{3}$.
I спосіб. Відкладемо на промені AC відрізки $AM = AB$ та $AD = AK = \frac{1}{2}AC$ (рис. 11). Оскільки $\angle BAM = 60°$, то трикутник ABM рівносторонній і бісектриса кута AMB проходить через точку O — центр описаного кола трикутника ABC. Але D — середина AC, тому $OD \perp AC$ та

$$BK = DM = OD \operatorname{ctg} 30° = a\sqrt{3}.$$

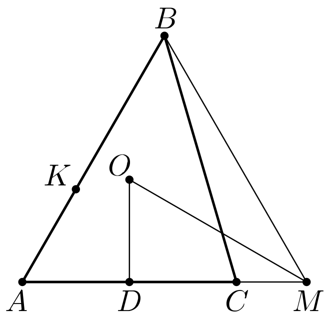

Рис. 11.

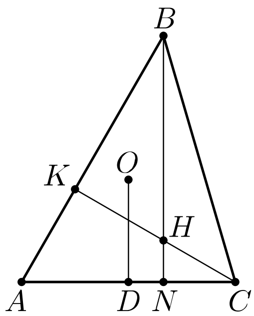

Рис. 12.

II спосіб. Легко довести, що CK — висота трикутника ABC. Нехай H — точка перетину висот CK і BN (рис. 12). Добре відомо, що $BH = 2a$. Тоді з трикутника BHK дістаємо $BK = BH \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

3.3. *I спосіб.* Через точку M проведемо прямі $EG \parallel BC$ та $FH \parallel AB$. Позначимо $BF = a$, $BE = b$, $AE = c$, $FC = d$ (рис. 13). Тоді

$$AM = \sqrt{a^2 + c^2},\ CM = \sqrt{b^2 + d^2},\ BM = \sqrt{a^2 + b^2},\ DM = \sqrt{c^2 + d^2},$$
$$AM \cdot CM + BM \cdot DM = \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2} \geq ab + cd, \quad \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geq ac + bd.$$

Тому $AM \cdot CM + BM \cdot DM \geq ab + cd + ac + bd = (a + d)(b + c) = S_{ABCD}$.

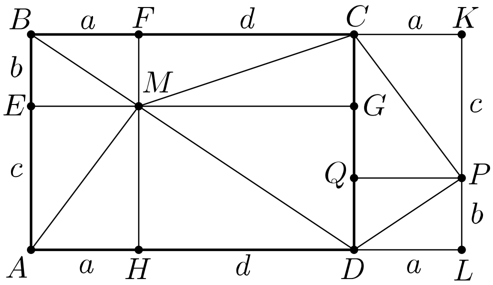

Рис. 13.

II спосіб. Виконаємо додаткові побудови як на рис. 13. Тоді

$$S_{ABCD} = S_{FKLH} = 2S_{MCPD} = 2S_{MCP} + 2S_{MPD} \leq$$
$$\leq MC \cdot CP + MD \cdot DP = MC \cdot AM + MD \cdot BM.$$

3.4. *Відповідь:* $k = 99$.

Нехай a_1, a_2, …, a_{100} — записані числа. Розглянемо многочлен

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2)\dots(x + a_{100}).$$

Цей многочлен 100-го ступеня набуває рівні значення в точках $0, 1, 2, \dots, k$. Отже, $k \leq 99$. Рівність $k = 99$ можлива, наприклад, якщо в якості початкового набору взяти числа -99, -98, …, -1, 0.