П'ятнадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. Довести, що для будь-яких натуральних чисел a та b існують такі натуральні числа x та y, що $\dfrac{x}{y+a}+\dfrac{y}{x+b}=\dfrac{3}{2}$.
2. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 5 спільних точок з іншими колами?
3. Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці 7×7 кожен своїм кольором. Гравець не може пофарбувати клітинку, якщо в одному рядку або одному стовпчику з нею вже є клітинка, пофарбована іншим гравцем. Гра закінчується, коли один з гравців не може зробити хід. Яка найбільша кількість клітинок може залишитися непофарбованою?
4. Нехай H — точка перетину висот AD та BE гострокутного трикутника ABC. Кола з діаметрами AE та BD дотикаються в точці L. Довести, що HL — бісектриса кута $\angle AHB$.
5. На дошці написано деяке двадцятицифрове число, запис якого містить 10 одиниць та 10 двійок. Дозволяється обирати довільні дві різні цифри та змінювати порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний. Чи завжди за допомогою таких операцій можна дістати число, яке ділиться на 11?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Пятнадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. Доказать, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа x и y, что $\dfrac{x}{y+a}+\dfrac{y}{x+b}=\dfrac{3}{2}$.
2. Можно ли разместить на плоскости пять окружностей так, чтобы каждая окружность имела ровно 5 общих точек с остальными окружностями?
3. Двое игроков по очереди красят клетки таблицы 7×7 каждый своим цветом. Игрок не может покрасить клетку, если в одной строчке или в одном столбике с ней уже есть клетка, покрашенная другим игроком. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться непокрашенным?
4. Пусть H — точка пересечения высот AD и BE остроугольного треугольника ABC. Окружности с диаметрами AE и BD касаются в точке L. Доказать, что HL — биссектриса угла $\angle AHB$.
5. На доске написано некоторое двадцатизначное число, запись которого содержит 10 единиц и 10 двоек. Разрешается выбирать любые две разные цифры и менять порядок всех цифр, которые стоят между ними, на противоположный. Всегда ли с помощью таких операций можно получить число, которое делится на 11?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

П'ятнадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 6 спільних точок з іншими колами?

2. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $ab + bc + ca = 2$. Довести, що

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} + 2(a+b+c) \geq 6.$$

3. Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці 7×7 кожен своїм кольором. Гравець не може пофарбувати клітинку, якщо в одному рядку або одному стовпчику з нею вже є клітинка, пофарбована іншим гравцем. Гра закінчується, коли один з гравців не може зробити хід. Яка найбільша кількість клітинок може залишитися непофарбованою?

4. На дошці написано деяке двадцятицифрове число, запис якого містить 10 одиниць та 10 двійок. Дозволяється обирати довільні дві різні цифри та змінювати порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний. Чи завжди за допомогою таких операцій можна дістати число, яке ділиться на 11?

5. Нехай AD та BE — висоти гострокутного трикутника ABC. Кола з діаметрами AD та BE перетинаються в точках S та T. Довести, що $\angle ACS = \angle BCT$.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Пятнадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Можно ли разместить на плоскости пять окружностей так, чтобы каждая окружность имела ровно 6 общих точек с остальными окружностями?

2. Пусть $a, b, c \geq 0$ и $ab + bc + ca = 2$. Доказать, что

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} + 2(a+b+c) \geq 6.$$

3. Двое игроков по очереди красят клетки таблицы 7×7 каждый своим цветом. Игрок не может покрасить клетку, если в одной строчке или в одном столбике с ней уже есть клетка, покрашенная другим игроком. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться непокрашенным?

4. На доске написано некоторое двадцатизначное число, запись которого содержит 10 единиц и 10 двоек. Разрешается выбирать любые две разные цифры и менять порядок всех цифр, которые стоят между ними, на противоположный. Всегда ли с помощью таких операций можно получить число, которое делится на 11?

5. Пусть AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Окружности с диаметрами AD и BE пересекаются в точках S и T. Доказать, что $\angle ACS = \angle BCT$.

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

П'ятнадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. Чи можна розмістити на площині п'ять кіл таким чином, щоб кожне коло мало рівно 7 спільних точок з іншими колами?

2. Двоє гравців по черзі фарбують клітинки таблиці 7×7 кожен своїм кольором. Гравець не може пофарбувати клітинку, якщо в одному рядку або одному стовпчику з нею вже є клітинка, пофарбована іншим гравцем. Гра закінчується, коли один з гравців не може зробити хід. Яка найбільша кількість клітинок може залишитися непофарбованою?

3. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $ab + bc + ca = 3$. Довести, що

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Нехай AD та BE — висоти гострокутного трикутника ABC. Кола з діаметрами AD та BE перетинаються в точках S та T. Довести, що $\angle ACS = \angle BCT$.

5. На дошці написано всі двадцятицифрові числа, запис яких містить 10 одиниць та 10 двійок. Дозволяється обирати у деякому числі довільні дві різні цифри та змінювати порядок всіх цифр, які стоять між ними, на протилежний. Яку найбільшу кількість однакових чисел можна дістати на дошці за допомогою таких операцій?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Пятнадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. Можно ли разместить на плоскости пять окружностей так, чтобы каждая окружность имела ровно 7 общих точек с остальными окружностями?

2. Двое игроков по очереди красят клетки таблицы 7×7 каждый своим цветом. Игрок не может покрасить клетку, если в одной строчке или в одном столбике с ней уже есть клетка, покрашенная другим игроком. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество клеток может остаться непокрашенным?

3. Пусть $a, b, c \geq 0$ и $ab + bc + ca = 3$. Доказать, что

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{bc}{a+1} + \frac{ca}{b+1} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Пусть AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Окружности с диаметрами AD и BE пересекаются в точках S и T. Доказать, что $\angle ACS = \angle BCT$.

5. На доске написаны все двадцатизначные числа, запись которых содержит 10 единиц и 10 двоек. Разрешается выбирать в некотором числе любые две разные цифры и менять порядок всех цифр, которые стоят между ними, на противоположный. Какое наибольшее количество одинаковых чисел можно получить на доске с помощью таких операций?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.