Тринадцятий Київський математичний фестиваль

В. Брайман[1], *О. Руденко*[2]

З 8 по 11 травня цього року в місті Києві відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8-10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у дитячому навчально-оздоровчому таборі "Дніпро", у мальовничому передмісті Києва — Конча-Заспі.

Цього року у фестивалі взяли участь команди Харківського фізико-математичного ліцею № 27, Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, Львівського фізико-математичного ліцею, Вінницького технічного ліцею, та київські команди Українського фізико-математичного ліцею, гімназії № 178 та, звісно, ліцею "Лідер".

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Всеволод Решетніков ("Лідер"), Микита Вєпрік (ХФМЛ № 27, 7 клас), Ольга Шевченко (Академічна гімназія № 45, м. Харків).

II місце: Віет Фам Хоанг (ХФМЛ № 27), Марк Анпілогов ("Лідер"), Денис Сікорський ("Лідер", 7 клас), Андрій Сахаров ("Лідер").

III місце: Анатолій Яцук (ЛФМЛ), Шон Нго Нок Тхай (ХФМЛ № 27, 7 клас), Назар Семків ("Лідер"), Анна Кравець ("Лідер"), Юрій Герасімов (ЛФМЛ), Петро Тарнавський (ЛФМЛ), Анна Карлишева ("Лідер"), Георгій Мендзебровський ("Лідер", 7 клас).

9 клас

I місце: Ольга Сіліна (ХФМЛ № 27), Ярослав Ківва ("Лідер").

II місце: Олександр Гунько (гімназія № 178, м. Київ), Денис Нарцев (УФМЛ), Іван Олексіюк ("Лідер"), Ростислав Пономарьов (ХФМЛ № 27), Денис Трєскунов ("Лідер"), Олександра Тумак (ЛФМЛ), Андрій Уразовський (ХФМЛ № 27), Ілля Бабієнко ("Лідер").

[1]механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка

[2]Інститут математики НАН України

III місце: Денис Бондаренко ("Лідер"), Богдан Європін ("Лідер"), Чунг Кионг Нгуен ("Лідер"), Іван Косюк ("Лідер"), Сава Степурін ("Лідер"), Ілля Бусов (ДОЛІФМП), Владислав Вертелецький (УФМЛ), Даніїл Ратаров ("Лідер").

10 клас

I місце: Фонг Во Дінь Тхань (ХФМЛ № 27).

II місце: Олег Ніколаєв (ХФМЛ № 27), Анастасія Кучеренко ("Лідер").

III місце: Богдан Пастущак (ЛФМЛ), Андрій Ошлянський ("Лідер"), Тарас Жиленко (ХФМЛ № 27), Ада Мелентьєва ("Лідер").

Умови задач

Олімпіада

8 клас

8.1. На прямій сидять дві білі та дві чорні кішки. Сума відстаней від білих кішок до однієї чорної кішки дорівнює 4, а до іншої 8. Сума відстаней від чорних кішок до однієї білої кішки дорівнює 3, а до іншої 9. Які кішки сидять крайніми?

8.2. Чи можна покрити дошку розміром 8×8 за допомогою 13 однакових п'ятиклітинкових фігурок? Фігурки дозволяється як завгодно повертати та перевертати.

8.3. У турнірі з квідичу брали участь 8 команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. Довести, що існують такі команди A, B, C, D, що команди A, B разом та C, D разом набрали однакову кількість перемог.

8.4. Довести, що при кожному натуральному y рівність

$$\text{НСК}(x, y+1) \cdot \text{НСК}(x+1, y) = x(x+1)$$

виконується при нескінченній кількості натуральних значень x (тут $\text{НСК}(a, b)$ — найменше спільне кратне чисел a та b).

8.5. Нехай AD, BE — висоти, а CF — бісектриса гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC, причому $AE + BD = AB$. Позначимо I_A, I_B, I_C точки перетину бісектрис трикутників AEF, BDF, CDE відповідно. Довести, що точки D, E, F, I_A, I_B та I_C лежать на одному колі.

9 клас

9.1. Див. задачу 8.1.

9.2. Нехай x, y, z — такі дійсні числа, що $(x-z)(y-z) = x+y+z-3$. Довести, що $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

9.3. Див. задачу 8.3.

9.4. Довести, що існує натуральне число y таке, що рівність

$$\text{НСК}(x, y+1) \cdot \text{НСК}(x+1, y) = y(y+1)$$

виконується принаймні при 2014 натуральних значеннях x (тут $\text{НСК}(a, b)$ — найменше спільне кратне чисел a та b).

9.5. Див. задачу 8.5.

10 клас

10.1. Див. задачу 9.2.

10.2. На прямій сидять дві білі та три чорні кішки. Сума відстаней від білих кішок до однієї чорної кішки дорівнює 11, до другої 7, а до третьої 9. Сума відстаней від чорних кішок до однієї білої кішки дорівнює 12, а до іншої 15. Які кішки можуть бути крайніми?
10.3. Див. задачу 9.4.
10.4. У турнірі з квідичу брали участь 25 команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. Довести, що існують такі команди A, B, C, D, E, F, що команди A, B разом, C, D разом та E, F разом набрали однакову кількість перемог.
10.5. Див. задачу 8.5.

Автори задач: В. Брайман (8.1=9.1∼10.2, 8.2, 8.4∼9.4=10.3, 8.5=9.5=10.5, 9.2=10.1), О. Руденко (8.3=9.3), О. Толесніков (10.4).

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[3]

1.1. На дошці були записані числа 10, 18 і 26. Дозволялося додати два записаних числа, відняти від цієї суми третє, а результат записати на дошку замість того числа, яке віднімалося. Після багаторазового виконання такої операції на дошці опинилися три числа, найменше з яких дорівнює 2014. Чому дорівнюють два інших числа?
1.2. У шаховому турнірі брали участь учні 8 та 9 класів, причому учнів 9 класу було в 10 разів більше, ніж учнів 8 класу. Кожен учасник турніру зустрічався з будь-яким іншим тільки один раз. При підведенні підсумків турніру виявилося, що учні 9 класу набрали разом у 4,5 рази більше очок, ніж усі учні 8 класу. Скільки очок набрали учні 8 класу (за перемогу у шахах дається одне очко, за нічию — пів-очка, а за поразку — 0 очок)?
1.3. Скільки сторін може мати опуклий многокутник, усі діагоналі якого рівні?
1.4. Послідовність натуральних чисел $\{x_n\}$ будується за таким правилом: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = [1,5x_n]$ ($[a]$ — ціла частина числа a).
а) Доведіть, що в послідовності $\{x_n\}$ нескінченно багато непарних чисел.
б) Доведіть, що в послідовності $\{x_n\}$ нескінченно багато парних чисел.

2 тур

2.1. У десятковому записі числа 2014^{2015} закреслили першу цифру і додали її до числа, що залишилося. З результатом проробили таку саму операцію і т. д., доки не отримали 10-цифрове число. Доведіть, що у записі цього числа є дві однакові цифри.
2.2. Доведіть, що у коло радіуса 1 не можна помістити без накладань два трикутники, площа кожного з яких більша за 1.
2.3. Знайдіть усі прості числа p, для кожного з яких існує натуральне число m таке, що $\sqrt{m} + \sqrt{m+p}$ — теж натуральне число.
2.4. Додатні числа a, b та c такі, що $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

[3] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

3 тур

3.1. Яке найбільше значення може набувати площа трикутника, сторони якого a, b і c задовольняють умовам $a \le 1$, $1 \le b \le 2$, $2 \le c < 3$?

3.2. У десятковому записі деякого числа цифри розташовані зліва направо у порядку спадання. Чи може це число бути кратним числу 111?

3.3. На дузі AB кола відмітили довільну точку M, через середину K відрізка MB провели пряму KP перпендикулярну прямій MA. Доведіть, що всі прямі PK проходять через одну точку.

3.4. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $9x^3 + 2 = y(y+1)$.

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

8.1. *Відповідь:* одна кішка чорна, а інша біла.
Якби обидві крайні кішки були білими, то суми відстаней від них до кожної з чорних кішок дорівнювали би відстані між білими кішками, але за умовою ці суми є різними. Аналогічно крайні кішки не можуть обидві бути чорними, тому вони мають різні кольори.

8.2. *Відповідь:* можна.
Два з можливих прикладів потрібних покриттів зображено на рис. 1.

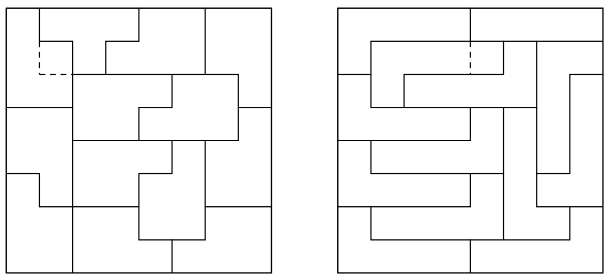

Рис. 1.

8.3. *I спосіб.* Кожна команда здобула від 0 до 7 перемог. Розіб'ємо можливі результати команд на пари 0 та 7, 1 та 6, 2 та 5, 3 та 4. Якщо команди показали обидва результати з принаймні двох пар, то існують дві пари команд, які набрали разом по 7 перемог. Якщо ж це не так, то 8 команд показали щонайбільше 5 різних результатів. Тоді або існують результати k та l, кожен з яких показали принаймні дві команди, і тоді можна утворити дві пари команд, які набрали разом по $k+l$ перемог, або існує результат k, який показали принаймні чотири команди, і тоді можна утворити дві пари команд, які набрали разом по $2k$ перемог.

II спосіб. Нехай команди набрали $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_8$ перемог. Покажемо, що серед різниць $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $\ldots$, $a_8 - a_7$ є принаймні три однакових. Справді, якщо це не так, то $a_8 - a_1 = (a_8 - a_7) + (a_7 - a_6) + \ldots + (a_2 - a_1) \ge 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$, що неможливо, бо $a_1 \geq 0$ та $a_8 \leq 7$. Отже, при деяких $1 \leq i < j < k \leq 7$ маємо $a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j = a_{k+1} - a_k$, а тому $a_i + a_{k+1} = a_{i+1} + a_k$, причому a_i, a_{i+1}, a_k, a_{k+1} — результати різних команд, бо $k > j > i$, а отже $k > i + 1$.

8.4. Оскільки НСК$(x, y+1) \geq x$, НСК$(x+1, y) \geq x+1$, то рівність з умови задачі виконується тоді й лише тоді, коли x ділиться на $y+1$ та $x+1$ ділиться на y. Тому достатньо покласти $x = y^2 - 1 + ky(y+1)$, де k — довільне ціле невід'ємне число.

8.5. *I спосіб.* Нехай I, H — точки перетину бісектрис та висот трикутника ABC, K, L, M — точки дотику вписаного у трикутник ABC кола зі сторонами BC, AC, AB відповідно (рис. 3). Покажемо, що I є центром описаного кола трикутника DEF. Для цього доведемо рівність прямокутних трикутників IDK, IEL та IFM.

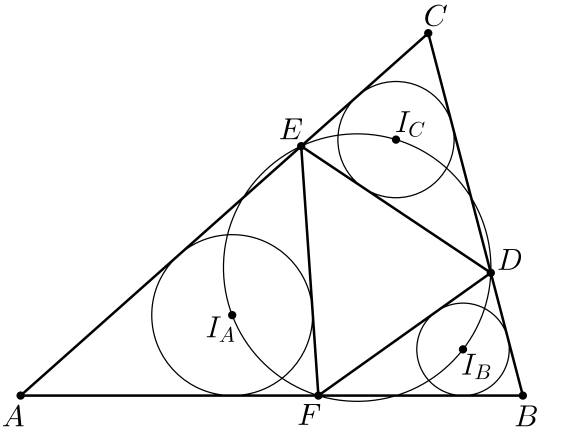

Рис. 2.

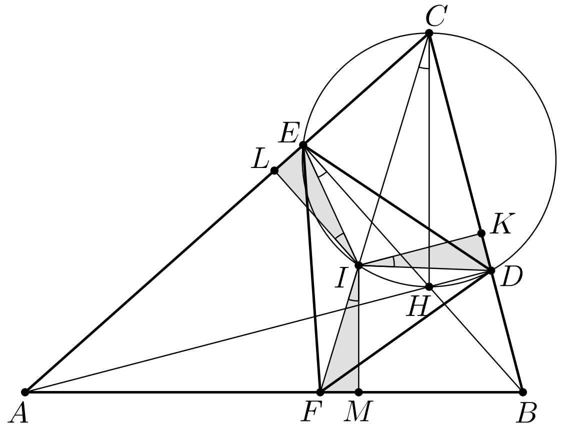

Рис. 3.

Оскільки $AL + BK = AE + BD = AB$, то $DK = EL$. Тому трикутники IDK та IEL рівні за двома катетами, зокрема $\angle KID = \angle LIE$. Звідси

$$\angle DIE = \angle KIL = 180^\circ - \angle ACB = \angle DHE,$$

тому точки C, D, E, H, I лежать на одному колі. Але тоді

$$\angle FIM = \angle ICH = \angle IEH = \angle EIL.$$

Отже, трикутники IFM та IEL рівні за катетом та гострим кутом, $ID = IE = IF$ та I — центр описаного кола трикутника DEF.

Також маємо $\angle IDK = \angle IEL = \angle IFM$, тому чотирикутники $AEIF$, $BDIF$ та $CDIE$ є вписаними. Точка I є серединою дуги описаного кола трикутника AEF, тому за теоремою про "тризуб" $II_A = IE = IF$. Отже, точка I_A належить описаному колу трикутника DEF. Аналогічно цьому колу належать точки I_B та I_C.

II спосіб. Відмітимо на AB таку точку X, що $AX = AE$, $BX = BD$ (рис. 4). Кути при основі рівнобедрених трикутників AXE та BXD дорівнюють

$$\angle DXB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle ABD) = \tfrac{1}{2}\angle AED \text{ та } \angle EXA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle BAE) = \tfrac{1}{2}\angle BDE$$

відповідно. Нехай коло ω, описане навколо трикутника DEX, вдруге перетинає AB у точці Y (якщо це коло дотикається до AB, то покладемо $Y = X$). Покажемо, що точки Y та F збігаються.

Справді,

$$\angle DEY = \angle DXB = \tfrac{1}{2}\angle AED,$$
$$\angle EDY = \angle EXA = \tfrac{1}{2}\angle BDE,$$

тому DY та EY є бісектрисами кутів $\angle BDE$ та $\angle AED$. Отже, Y є центром зовнівписаного кола трикутника CDE, а тому належить бісектрисі кута $\angle ACB$, тобто збігається з F.

Оскільки $\angle I_CDF = \angle I_CEF = 90^\circ$ як кути між бісектрисами суміжних кутів, то I_CF — діаметр кола ω. Далі,

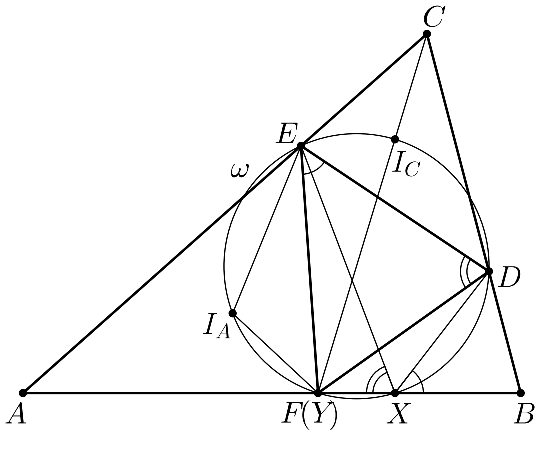

Рис. 4.

$$\angle EI_AF + \angle EDF = (90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle EAF) + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle EAF) = 180^\circ.$$

тому чотирикутник I_AEDF вписаний, тобто точка I_A належить колу ω. Аналогічно точка I_B належить колу ω.

Зауваження. З II способу випливає, що твердження задачі залишається в силі, якщо D та E — такі точки на сторонах BC та AC трикутника ABC відповідно, що чотирикутник $AEDB$ є вписаним та $AE + BD = AB$. Оскільки серединними перпендикулярами до DX та EX є бісектриси кутів $\angle ABC$ та $\angle BAC$ відповідно, то у цьому більш загальному випадку центром кола ω, тобто центром описаного кола трикутника DEF, теж є точка I.

9.2. Оскільки за умовою $xy - xz - yz - x - y = -z^2 + z - 3$, то

$$\begin{aligned}(x+y-z-1)^2 =& x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-2x-2y+2z+1 =\\ =& (x^2+y^2+z^2) - 2z^2 + 4z - 5 = (x^2+y^2+z^2) - 2(z-1)^2 - 3,\end{aligned}$$

звідки $x^2+y^2+z^2 = (x+y-z-1)^2 + 2(z-1)^2 + 3 \geq 3$.

9.4. *I спосіб.* Оскільки НСК$(x, y+1) \geq y+1$, НСК$(x+1, y) \geq y$, то рівність з умови задачі виконується тоді й лише тоді, коли $y+1$ ділиться на x та y ділиться на $x+1$. Покажемо індукцією за $n \geq 1$, що при деякому y ці умови виконуються принаймні при n значеннях x. База індукції: якщо $y = 2$ та $x = 1$, то $2+1$ ділиться на 1 та 2 ділиться на $1+1$. Нехай тепер існують такі числа y та $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що y ділиться на $x_k + 1$ та $y+1$ ділиться на x_k, $1 \leq k \leq n$. Тоді число $y(y+2)$ ділиться на x_k+1, $1 \leq k \leq n$, та на $y+2$, а число $y(y+2)+1 = (y+1)^2$ ділиться на x_k, $1 \leq k \leq n$, та на $y+1$. Таким чином, для числа $y' = y(y+2)$ умови виконуються при $n+1$ значеннях x, а саме $x_1, \ldots, x_n$ та $x_{n+1} = y+1$, індукційний перехід доведено.

II спосіб. Покладемо $y = 2^{2^{2014}} - 1$ та покажемо, що рівність з умови задачі виконується при $x_k = 2^{2^k}$, $0 \leq k \leq 2013$. Справді, число $y + 1 = 2^{2^{2014}}$ ділиться на $x_k = 2^{2^k}$, а число $y = 2^{2^{2014}} - 1$ ділиться на $2^{2^{k+1}} - 1$, а отже і на $x_k + 1 = 2^{2^k} + 1$.

10.2. *Відповідь:* обидві кішки чорні або одна кішка чорна, а інша біла.
Між білими кішками знаходиться щонайбільше одна чорна кішка, бо інакше суми відстаней від білих кішок до деяких з чорних кішок були би рівними, а за умовою це

не так. Отже, обидві крайні кішки не можуть бути білими. Неважко навести приклади розташувань кішок, які задовольняють умову та для яких одна або дві крайні кішки є чорними (рис. 5).

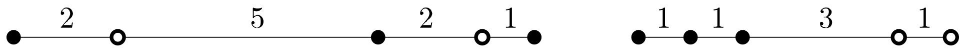

Рис. 5.

10.4. Якщо деякі 6 команд показали однаковий результат або деякі два результати показали принаймні по три команди, то твердження задачі очевидно виконується. Надалі будемо вважати, що деякий результат у турнірі повторюється щонайбільше 5 разів, а принаймні 20 команд показали результати, які повторюються щонайбільше двічі.

З 20 команд можна утворити $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$ пар, кожна з яких здобула від 1 до 47 перемог (справді, пара команд не може набрати 0 або 48 перемог, оскільки команди пари принаймні одну перемогу та принаймні одну поразку здобули у грі між собою). Тому знайдуться принаймні $\frac{190}{47} > 4$, тобто принаймні 5 пар команд, які разом набрали однакову кількість w перемог, проте ці пари можуть містити спільні команди. Покажемо, що можна використати не менше половини цих пар так, щоб команди у парах не повторювалися. Якщо a команд показали результат $u \neq \frac{w}{2}$ та b команд показали результат $w - u$, то з них можна утворити ab пар команд з результатом w, серед яких знайдуться $\min(a, b)$ пар команд без спільних команд у парах. Оскільки $a, b \leq 2$, то неважко перевірити, що $\min(a, b) \geq \frac{ab}{2}$. Якщо w парне та 2 команди показали результат $\frac{w}{2}$, то з них можна утворити єдину пару команд з результатом w, причому цю пару теж можна використати. Отже, з 5 пар команд, які разом набрали w перемог, можна вибрати принаймні $\frac{5}{2}$, тобто принаймні 3 пари команд без спільних команд у парах.

Зауваження. Подібні міркування дозволяють довести таке більш загальне твердження:

Нехай у турнірі брали участь $4k^2 - 6k + 4$ команд, $k \geq 2$, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. Тоді існують $2k$ команд, які можна розбити на пари так, що команди кожної пари разом набрали однакову кількість перемог.

Доведення. Позначимо n кількість команд у турнірі. Аналогічно до розв'язання задачі 10.4 достатньо розглянути випадок, коли деякий результат у турнірі повторюється щонайбільше $2k - 1$ разів, а решта результатів — щонайбільше $k - 1$ разів, бо інакше твердження очевидно виконується. Тоді можна видалити з розгляду k команд так, щоб серед інших $n - k$ команд кожен результат зустрічався не більше $k - 1$ разів.

З $n - k$ команд можна утворити $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ пар, кожна з яких здобула від 1 до $2n-3$ перемог. Тому знайдуться принаймні $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2(2n-3)}$ пар команд, які разом набрали однакову кількість w перемог.

Оцінимо, скільки з цих пар можна використати так, щоб команди у парах не повторювалися. Якщо a команд показали результат $u \neq \frac{w}{2}$ та b команд показали результат $w - u$, то з них можна утворити ab пар команд з результатом w, серед яких знайдуться $\min(a, b)$ пар команд без спільних команд у парах. Оскільки $a, b \leq k - 1$, то $\frac{\min(a,b)}{ab} = \frac{1}{\max(a,b)} \geq \frac{1}{k-1}$. Якщо w парне та $2 \leq c \leq k - 1$ команд показали результат $\frac{w}{2}$, то з них можна утворити $c(c-1)/2$ пар команд з результатом w, серед яких знайдуться $[c/2]$ пар команд без спільних команд у парах, причому $\frac{[c/2]}{c(c-1)/2} \geq \frac{(c-1)/2}{c(c-1)/2} = \frac{1}{c} \geq \frac{1}{k-1}$. Отже, можна використати принаймні $\frac{1}{k-1}$ частину від загальної кількості команд, які разом набрали w перемог, тобто можна вибрати не менше за $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2(2n-3)(k-1)}$ пар команд без спільних команд у парах. Залишилось перевірити, що ця кількість більша за $k-1$, тобто не менша за k. Справді, при $n = 4k^2 - 6k + 4$ після розкриття дужок та зведення подібних дістаємо

$$(n-k)(n-k-1) - 2(2n-3)(k-1)^2 =$$
$$= (4k^2 - 7k + 4)(4k^2 - 7k + 3) - 2(8k^2 - 12k + 5)(k-1)^2 = (3k-2)(k-1) > 0,$$

що завершує доведення.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* 2022 та 2030.

Помітимо, що $18 - 10 = 8$ та $26 - 18 = 8$. Покажемо, що в будь-який момент часу одне з чисел на дошці буде на 8 менше другого та на 8 більше третього. Справді, нехай ця властивість виконана, і на дошці записані числа $x-8$, x, $x+8$. Якщо додати два крайні числа та відняти середнє, то трійка чисел не зміниться. Якщо додати два перші числа та відняти третє, то дістанемо трійку $x-8$, x, $x-16$, а якщо додати два останні числа та відняти перше, то дістанемо трійку $x+16$, x, $x+6$. У всіх випадках зазначена властивість зберігається, тому вона буде виконуватися після кожного кроку. Тому шукані числа це $2014 + 8 = 2022$ і $2022 + 8 = 2030$.

1.2. *Відповідь:* 10.

Нехай кількість учнів 8 класу дорівнює x, а кількість учнів 9 класу — $10x$. Кількість всіх учасників турніру — $11x$, тому було зіграно $\frac{11x(11x-1)}{2}$ партій. Кількість очок, набраних учнями 8 класу, дорівнює $\frac{11x(11x-1)}{2} \cdot \frac{2}{11} = 11x^2 - x$. Кількість всіх зіграних учнями 8 класу партій дорівнює $\frac{x(x-1)}{2} + 10x^2$. Ця кількість не менша за кількість очок, набраних учнями 8 класу, отже можна записати нерівність $11x^2 - x \leq \frac{x(x-1)}{2} + 10x^2$. Звідси $x^2 \leq x$, $x \leq 1$, $x = 1$.

1.3. *Відповідь:* 4 або 5.

У квадрата та правильного п’ятикутника всі діагоналі рівні. Доведемо, що інших опуклих многокутників з усіма рівними діагоналями не існує. Припустимо, що всі діагоналі опуклого многокутника $A_1A_2\dots A_n$ рівні та $n \geq 6$. Розглянемо опуклий чотирикутник $A_1A_2A_4A_5$ (рис. 6). Сума його діагоналей A_1A_4 і A_2A_5 більша за суму протилежних сторін A_2A_4 і A_1A_5, що неможливо, оскільки за припущенням ці суми є рівними.

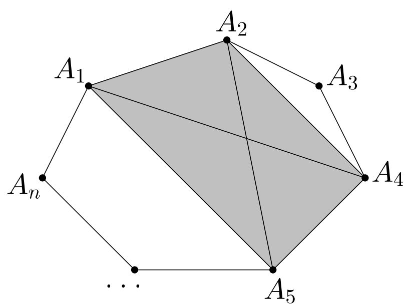

Рис. 6.

1.4. Припустимо, що число x_n є парним. Тоді його можна подати у вигляді $x_n = 2^m a$, де a непарне та $m \geq 1$. У такому випадку $x_{n+1} = 2^{m-1}(2a + a) = 2^{m-1}a_1$, де число

a_1 є непарним. Звідси випливає, що число x_{n+m} є непарним. Припустимо тепер, що число x_n є непарним. Тоді його можна подати у вигляді $x_n = 2^m a + 1$, де a непарне та $m \geq 1$. У такому випадку $x_{n+1} = 2^{m-1}(2a+a)+1 = 2^{m-1}a_1+1$, де число a_1 є непарним. Звідси випливає, що число x_{n+m} є парним. Таким чином, після кожного парного числа в послідовності $\{x_n\}$ обов'язково зустрінеться непарне, а після кожного непарного — парне. Тому в послідовності нескінченно багато як парних, так і непарних чисел.

2.1. Оскільки при кожній операції від числа віднімається число вигляду $a(10^k - 1)$, то остача від ділення на дев'ять не змінюється. Отже, отримане 10-значне число не ділиться на дев'ять. З іншого боку, якщо всі його цифри є різними, то їх сума дорівнює $0+1+\ldots+9 = 45$, тобто ділиться на дев'ять. Таким чином, серед цифр є дві однакові.

2.2. Припустимо, що в колі радіуса 1 розмістили два трикутники, площа яких більша за 1. Достатньо довести, що обидва трикутника містять центр кола O. Доведемо, що якщо трикутник ABC, розташований всередині кола радіуса 1 та не містить центр кола, то його площа менша за 1. Справді, для точки O, яка лежить поза трикутником, знайдеться пряма, що проходить через дві вершини трикутника та відділяє цю точку від третьої вершини. Нехай для визначеності пряма AB розділяє точки C та O (рис. 7). Тоді $h_c < 1$ та $AB < 2$, а отже $S = h_c \cdot AB/2 < 1$.

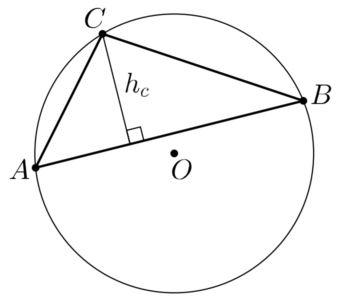

Рис. 7.

2.3. *Відповідь:* p — будь-яке непарне просте число.

Нехай p — непарне, тобто $p = 2t + 1$, де t — натуральне число. Тоді умова задачі виконується при $m = t^2$. Залишилося розглянути випадок $p = 2$. Нехай для деякого m число $\sqrt{m}+\sqrt{m+2}$ є натуральним. Тоді $\sqrt{m+2} = y-m$, тобто $m+2 = y^2-2y\sqrt{m}+m$. Отже, $\sqrt{m} = \frac{y^2-2}{2y}$ — раціональне число. Тоді $\sqrt{m}$ — ціле число та $\sqrt{m+2}$ теж має бути цілим числом. Але квадратів натуральних чисел, які відрізняються на 2, не існує.

2.4. Скористаємося нерівністю $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, яка виконується при всіх $x, y \geq 0$. Можна записати

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{b+2c+a}, \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{c+2a+b}, \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c}.$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{4}{b+2a+c} + \frac{4}{a+2b+c} + \frac{4}{c+2b+a}.$$

Залишилося розділити обидві частини отриманої нерівності на 2 та врахувати, що $a + b + c = 1$.

3.1. *Відповідь:* 1.

Нехай кут між сторонами a та b дорівнює α. Тоді для площі S трикутника маємо $S = \frac{ab\sin\alpha}{2} \leq \frac{1\cdot 2\cdot 1}{2} = 1$, причому $S = 1$ при $\alpha = 90°$. Помітимо, що при $\alpha = 90°$, $a = 1$ та $b = 2$, третя сторона трикутника $c = \sqrt{5}$, що задовольняє умові $2 \leq c < 3$.

3.2. *Відповідь:* Не може.

Припустимо, що існують числа, які задовольняють умову та діляться на 111. Нехай

A — найменше серед них. Можливі два випадки: 1) Число A закінчається нулем. Закреслюючи його, ми дістанемо менше число із цифрами в порядку спадання, яке теж ділиться на 111, супречність; 2) A закінчується на ненульову цифру. Тоді число $A - 111$ також кратне 111 і цифри в його записі розташовані в порядку спадання, знову суперечність.

3.3. Проведемо діаметр AC та з'єднаємо точку B з точкою C (рис. 8). Нехай пряма PK перетинає пряму BC в точці H. З'єднаємо точку M з точкою C. Тоді $\angle AMC = 90°$ як кут, що спирається на діаметр. Отже, $PH \perp AM$ та $MC \perp AM$, звідки $PH \parallel MC$. Пряма KH проходить через середину сторони MB трикутника MBC паралельно стороні MC, тому KH — середня лінія трикутника BMC та $BH = HC$. Оскільки відрізок BC не залежить від положення змінної точки M, то його середина фіксована та всі прямі PK пройдуть через цю точку.

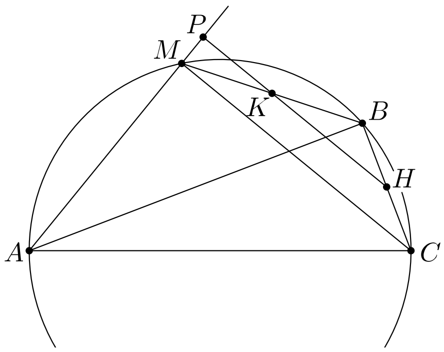

Рис. 8.

3.4. *Відповідь:* $(0;-2)$, $(0;1)$.

Перепишемо рівняння у вигляді $9x^3 = (y-1)(y+2)$. Оскільки числа $y-1$ та $y+2$ дають однакові остачі при діленні на 3, то кожне з них має ділитися на 3. Нехай $y - 1 = 3k$, де k — ціле число. Тоді $y + 2 = 3k + 3$. Маємо $9x^3 = 3k(3k + 3)$, або $x^3 = k(k + 1)$. Значення виразів k та $k + 1$ — взаємно прості числа, а отже кожне з них має бути кубом цілого числа. Зрозуміло, що це можливо лише при $k = -1$ та $k = 0$.