

Чотирнадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. Довести, що існує нескінченно багато пар дійсних чисел (x, y) таких, що

$$\sqrt{1 + 2x - xy} + \sqrt{1 + 2y - xy} = 2.$$

2. У компанії з 6 ховрахів у кожного ховраха рівно 4 друга. Чи завжди можна розбити компанію на дві групи по 3 ховраха так, аби в кожній групі всі ховрахи були друзями?
3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 100, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?
4. Нехай O — точка перетину висот AD та BE рівностороннього трикутника ABC . На відрізках AO та BO відмітили точки $K \neq O$ та $L \neq O$ відповідно так, що пряма KL ділить периметр трикутника ABC навпіл. Нехай F — точка перетину прямих EK та DL . Довести, що O — центр описаного кола трикутника DEF .
5. Том пофарбував круговий паркан з $2n \geq 6$ секцій таким чином, що кожен секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. При яких n Том може перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів?

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Четырнадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. Доказать, что существует бесконечно много пар действительных чисел (x, y) таких, что

$$\sqrt{1 + 2x - xy} + \sqrt{1 + 2y - xy} = 2.$$

2. В компании из 6 сусликов у каждого суслика ровно 4 друга. Всегда ли можно разбить компанию на две группы по 3 суслика так, чтобы в каждой группе все суслики были друзьями?
3. Правда ли, что любое натуральное число, большее 100, является суммой 4 натуральных чисел, каждые два из которых имеют общий делитель, больший 1?
4. Пусть O — точка пересечения высот AD и BE равностороннего треугольника ABC . На отрезках AO и BO отметили точки $K \neq O$ и $L \neq O$ соответственно так, что прямая KL делит периметр треугольника ABC пополам. Пусть F — точка пересечения прямых EK и DL . Доказать, что O — центр описанной окружности треугольника DEF .
5. Том покрасил круговой забор из $2n \geq 6$ секций таким образом, что каждая секция покрашена в один из четырех цветов. Потом он повторяет такую операцию пока это возможно: выбирает три соседние секции разных цветов и перекрашивает их в четвертый цвет. При каких n Том может перекрашивать забор указанным образом бесконечно много раз?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Чотирнадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Довести, що існує нескінченно багато пар дійсних чисел (x, y) таких, що

$$\sqrt{1 + 2x - xy} + \sqrt{1 + 2y - xy} = 2.$$

2. У компанії з 7 ховрахів у кожного ховраха рівно 4 друга. Чи завжди можна виділити з компанії дві неперетинні групи по 3 ховраха так, аби в кожній групі всі ховрахи були друзями?
3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 50, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?
4. Нехай O — точка перетину висот AD та BE рівностороннього трикутника ABC . На відрізках AO та BO відмітили точки $K \neq O$ та $L \neq O$ відповідно так, що пряма KL ділить периметр трикутника ABC навпіл. Нехай F — точка перетину прямих EK та DL . Довести, що O — центр описаного кола трикутника DEF .
5. Том пофарбував круговий паркан з $2n \geq 6$ секцій таким чином, що кожен секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. При яких n Том може перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів?

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Четырнадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Доказать, что существует бесконечно много пар действительных чисел (x, y) таких, что

$$\sqrt{1 + 2x - xy} + \sqrt{1 + 2y - xy} = 2.$$

2. В компании из 7 сусликов у каждого суслика ровно 4 друга. Всегда ли можно выделить из компании две непересекающиеся группы по 3 суслика так, чтобы в каждой группе все суслики были друзьями?
3. Правда ли, что любое натуральное число, большее 50, является суммой 4 натуральных чисел, каждые два из которых имеют общий делитель, больший 1?
4. Пусть O — точка пересечения высот AD и BE равностороннего треугольника ABC . На отрезках AO и BO отметили точки $K \neq O$ и $L \neq O$ соответственно так, что прямая KL делит периметр треугольника ABC пополам. Пусть F — точка пересечения прямых EK и DL . Доказать, что O — центр описанной окружности треугольника DEF .
5. Том покрасил круговой забор из $2n \geq 6$ секций таким образом, что каждая секция покрашена в один из четырех цветов. Потом он повторяет такую операцию пока это возможно: выбирает три соседние секции разных цветов и перекрашивает их в четвертый цвет. При каких n Том может перекрашивать забор указанным образом бесконечно много раз?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Чотирнадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+2x-xy} + \sqrt{1+2y-xy} = 2$.
2. У компанії з 7 ховрахів у кожного ховраха рівно 4 друга. Чи завжди можна виділити з компанії дві неперетинні групи по 3 ховраха так, аби в кожній групі всі ховрахи були друзями?
3. Чи правда, що довільне натуральне число, більше за 30, є сумою 4 натуральних чисел, кожні два з яких мають спільний дільник, більший за 1?
4. Нехай O — точка перетину висот AD та BE рівностороннього трикутника ABC . На відрізках AO та BO відмітили точки $K \neq O$ та $L \neq O$ відповідно так, що пряма KL ділить периметр трикутника ABC навпіл. Нехай F — точка перетину прямих EK та DL . Довести, що O — центр описаного кола трикутника DEF .
5. Том пофарбував круговий паркан з $2n \geq 6$ секцій таким чином, що кожна секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. При яких n Том може перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів?

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Четырнадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. Решить уравнение $\sqrt{1+2x-xy} + \sqrt{1+2y-xy} = 2$.
2. В компании из 7 сусликов у каждого суслика ровно 4 друга. Всегда ли можно выделить из компании две непересекающиеся группы по 3 суслика так, чтобы в каждой группе все суслики были друзьями?
3. Правда ли, что любое натуральное число, большее 30, является суммой 4 натуральных чисел, каждые два из которых имеют общий делитель, больший 1?
4. Пусть O — точка пересечения высот AD и BE равностороннего треугольника ABC . На отрезках AO и BO отметили точки $K \neq O$ и $L \neq O$ соответственно так, что прямая KL делит периметр треугольника ABC пополам. Пусть F — точка пересечения прямых EK и DL . Доказать, что O — центр описанной окружности треугольника DEF .
5. Том покрасил круговой забор из $2n \geq 6$ секций таким образом, что каждая секция покрашена в один из четырёх цветов. Потом он повторяет такую операцию пока это возможно: выбирает три соседние секции разных цветов и перекрашивает их в четвертый цвет. При каких n Том может перекрашивать забор указанным образом бесконечно много раз?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.