Двадцятий Київський математичний фестиваль

Володимир Брайман[1] *та Олексій Руденко*[2]

Цього року традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8–10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук відбувся онлайн. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва.

Цього року у фестивалі взяли участь команди шкіл та ліцеїв Києва, Харкова, Одеси, Львова, Кривого Рогу, а також Москви, Пермі, Хабаровська та Комсомольська-на-Амурі (Росія).

Пропонуємо вашій увазі результати та матеріали письмової олімпіади фестивалю.

Переможці олімпіади

8 клас

I місце

Марина Спектрова (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)

II місце

Матвій Кутах (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків, 7 клас)
Денис Гафич (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)

III місце

Ярослав Ібрагімов (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)
Олександр Бородін (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)
Веніамін Бібік (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер", 7 клас)
Степан Федуняк (Львівський фізико-математичний ліцей)
Антон Салов (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)
Ілля Фурсов (НВК № 45 "Академічна гімназія", м. Харків)
Ілля Людоговський (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер", 7 клас)
Діана Резніченко (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер", 7 клас)

9 клас

I місце

Іван Бортновський (Малий каразінський університет/ліцей № 161, м. Харків)
Іван Толстов (школа № 2007, м. Москва)
Олексій Толкачов (Львівський фізико-математичний ліцей)

II місце

Єгор Жаріхін (НВК № 45 "Академічна гімназія", м. Харків)

[1]механіко-математичний факультет КНУ імені Тараса Шевченка
[2]Інститут математики НАН України

Михайло Сорока (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)
Дмитро Лабузний (ліцей інноваційних технологій, м. Хабаровськ)
Ксенія Дроздова (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)

III місце

Поліна Геник (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер")
Марія Назарова (ліцей інноваційних технологій, м. Хабаровськ)
Станіслав Сурмило (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)
Дар'я Голясова (НВК № 45 "Академічна гімназія", м. Харків)
Юрій Міняйлик (Рішельєвський ліцей, м. Одеса)
Ігор Фасхутдінов (ліцей № 208, м. Київ)
Володимир Чуб (НВК № 45 "Академічна гімназія", м. Харків)
Дмитро Куліш (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)

10 клас

I місце

Артем Піковець (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)

II місце

Вадим Гассєєв (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)
Вадим Пашковський (Харківський фізико-математичний ліцей № 27)
Семен Андрієць (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер")
Роман Янушевський (природничо-науковий ліцей № 145, м. Київ)

III місце

Костянтин Шемчук (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер")
Ірина Гонцовська (Львівський фізико-математичний ліцей)
Георгій Коваль (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)
Єгор Авдєєв (Малий каразінський університет/ХФМЛ № 27, м. Харків)
Антон Гаврилюк (ліцей "Наукова зміна", м. Київ)
Віктор Сергєєв (інженерна школа, Комсомольськ-на-Амурі)
Микита Слісарчук (природничо-науковий ліцей № 145, м. Київ)
Даніїл Теплов (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер")
Борис Трегубенко (Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер")

Умови задач

8 клас

8.1. Розв'язати у цілих числах рівняння $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) = 1000$.

8.2. У деяких 11 клітинках клітчастої дошки живуть їжаки. Кожен їжак поділив кількість їжаків у своєму рядку на кількість їжаків у своєму стовпчику. Чи могли у всіх їжаків вийти різні числа?

8.3. Нехай ω — описане коло трикутника ABC ($AB > AC$), E — середина дуги AC, яка не містить точку B, а F — середина дуги AB, яка не містить точку C. Прямі

AF та BE перетинаються в точці P, прямі CF та AE перетинаються в точці R, а дотична до ω в точці A перетинає пряму BC в точці Q. Довести, що точки P, Q, R лежать на одній прямій.

8.4. Знайти всі набори з 63 цілих чисел таких, що квадрат кожного числа дорівнює сумі всіх інших чисел та не всі числа є однаковими.

8.5. Більбо складає числовий трикутник з нулів та одиниць таким чином: у верхньому рядку він пише деякі n цифр, а в інших рядках під сусідніми однаковими цифрами завжди пише 0, а під сусідніми різними цифрами — 1. (На рисунку зображено приклад трикутника при $n = 5$.) Скількома способами Більбо може заповнити верхній рядок при $n = 100$ так, аби у кожному з n рядків трикутника кількість одиниць була парною?

```
1 0 1 1 0
 1 1 0 1
  0 1 1
   1 0
    1
```

9 клас

9.1. Чи можна відмітити на площині чотири точки так, що відстані від будь-якої точки до трьох інших утворюють арифметичну прогресію?

9.2. У декількох клітинках клітчастої дошки живуть їжаки. Кожен їжак помножив кількість їжаків у своєму рядку на кількість їжаків у своєму стовпчику. Чи могли у всіх їжаків вийти різні числа?

9.3. Нехай AD — висота, AE — медіана та O — центр описаного кола трикутника ABC. Всередині трикутника обрали точки X та Y так, що $\angle BAX = \angle CAY$, $OX \perp AX$ та $OY \perp AY$. Довести, що точки D, E, X, Y лежать на одному колі.

9.4. Див. задачу 8.4.

9.5. Фродо складає числовий трикутник з нулів та одиниць таким чином: у верхньому рядку він пише деякі n цифр, а в інших рядках під сусідніми однаковими цифрами завжди пише 0, а під сусідніми різними цифрами — 1. (На рисунку зображено приклад трикутника при $n = 5$.) Скількома способами Фродо може заповнити верхній рядок при $n = 100$ так, аби у кожному з n рядків трикутника кількість одиниць була непарною?

```
1 0 1 1 0
 1 1 0 1
  0 1 1
   1 0
    1
```

10 клас

10.1. Див. задачу 9.1.

10.2. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $a + b + c = 3$. Довести, що $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) \leq 8$.

10.3. Чи при кожному $n \geq 2021$ існує n цілих чисел таких, що квадрат кожного числа дорівнює сумі всіх інших чисел та не всі числа є однаковими?

10.4. Див. задачу 9.5.

10.5. Нехай ω — описане коло трикутника ABC ($AB \neq AC$), I — центр вписаного кола, P — точка на ω, для якої $\angle API = 90°$, S — точка перетину прямих AP та BC, W — точка перетину прямої AI з ω. Пряма, яка проходить через точку W перпендикулярно до AW, перетинає AP та BC у точках D та E відповідно. Довести, що $SD = IE$.

Автори задач: Є. Азаров (10.5), В. Брайман (8.1, 8.2∼9.2, 9.1=10.1), М. Курський (8.3, 9.3), О. Руденко (8.4=9.4∼10.3, 10.2), О. Руденко та В. Брайман (8.5∼9.5=10.4).

Розв'язки та вказівки

8.1. *Відповідь:* розв'язків немає.
Ліва частина рівняння дає таку ж остачу при діленні на 3, як число $(-bc) \cdot (-ac) \cdot (-ab) = -(abc)^2$, тобто остачу 0 або 2, а права частина — остачу 1. Тому рівність неможлива.

8.2. *Відповідь:* так, могли.
На рис. 1 показано приклад клітинок, в яких живуть їжаки, та чисел, які вони отримали.

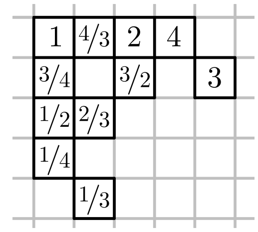

Рис. 1.

8.3. Оскільки E, F — середини дуг AC та AB, то BE — бісектриса кута ABQ, а AF — бісектриса зовнішнього кута при вершині A цього ж трикутника (рис. 2). Тому P — центр зовнівписаного кола трикутника ABQ та QP — бісектриса кута між прямими AQ та BQ. Аналогічно R — центр зовнівписаного кола трикутника ACQ та QR — бісектриса кута між прямими AQ та BQ. Таким чином, QP та QR — бісектриси вертикальних кутів та $P - Q - R$ — одна пряма.

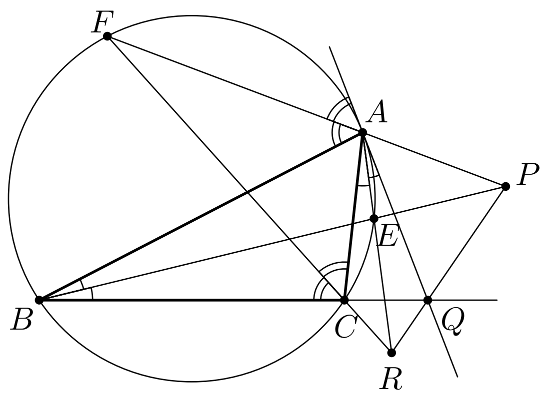

Рис. 2.

8.4. *Відповідь:* 39 чисел 2 та 24 чисел -3 або 39 чисел 12 та 24 чисел -13.
Якщо набір містить числа a та b, то кожне з чисел $a^2 + a$ та $b^2 + b$ дорівнює сумі всіх чисел набору. Отже, $a^2 + a = b^2 + b$, тобто $(a - b)(a + b + 1) = 0$. Тому якщо $b \neq a$, то $b = -a - 1$. Таким чином, набір має складатися лише з певної кількості чисел a та певної кількості чисел $-a - 1$. Нехай у наборі є k чисел a та $63 - k$ чисел $-a - 1$, де $0 < k < 63$. Без обмеження загальності можна вважати, що $a \geq -a - 1$, звідки $a \geq 0$.

За умовою $a^2 = (k - 1)a + (63 - k)(-a - 1)$, або

$$(2a + 1)k = a^2 + a + 63(a + 1) = (a + 63)(a + 1), \quad \text{звідки} \quad k = \frac{(a + 63)(a + 1)}{2a + 1}.$$

Оскільки числа $a + 1$ та $2a + 1$ взаємно прості, то $a + 63$ має ділитися на $2a + 1$. Тоді $2(a+63) - (2a+1) = 125$ теж ділиться на $2a+1$. Таким чином, $2a+1$ має дорівнювати 1, 5, 25 або 125, тобто a дорівнює 0, 2, 12 або 62. При $a = 0$ та $a = 62$ дістаємо $k = 63$, тобто всі числа у наборі однакові. При $a = 2$ та $a = 12$ дістаємо $k = 39$, тобто набір складається з 39 чисел 2 та 24 чисел -3 або з 39 чисел 12 та 24 чисел -13. Ці набори справді задовольняють умову.

8.5. *Відповідь:* 2^{50} способами.

Покажемо, як побудувати всі трикутники, що задовольняють умову, починаючи з нижніх рядків та рухаючись вгору. Зрозуміло, що у нижньому рядку стоїть 0. Припустимо, що відомі всі цифри у рядку довжини $2i-1$, цей рядок є симетричним (тобто однаково читається зліва направо та справа наліво) та його середня цифра це 0. Тоді у рядку довжини $2i$ дві середні цифри мають бути однаковими, тобто це або 0 0, або 1 1. Якщо дві середні цифри вже обрано, то всі інші цифри цього рядка можна однозначно відновити, рухаючись від середини вліво та вправо та обираючи цифри так, аби над 0 завжди стояли однакові цифри, а над 1 — різні. При цьому оскільки рядок довжини $2i-1$ симетричний, то і рядок довжини $2i$ виявиться симетричним, зокрема він гарантовано буде містити парну кількість одиниць. Тепер припустимо, що відомі всі цифри у рядку довжини $2i$ та він є симетричним. Якщо у рядку довжини $2i+1$ обрано середню цифру, то всі інші цифри цього рядка можна однозначно відновити, рухаючись від середини вліво та вправо. При цьому рядок довжини $2i+1$ виявиться симетричним. Він буде містити парну кількість одиниць, якщо середня цифра 0, та непарну кількість одиниць, якщо середня цифра 1. Отже, середньою цифрою цього рядка має бути 0.

Таким чином можна послідовно заповнити рядки довжини $1, 2, 3, \ldots, 100$, причому кожен рядок парної довжини визначається двома способами, а кожен рядок непарної довжини — єдиним способом. Тому дістанемо 2^{50} трикутників, які задовольняють умову, та відповідно 2^{50} можливих верхніх рядків.

9.1. *Відповідь:* так, можна.

I спосіб. Достатньо відмітити вершини прямокутника зі сторонами 3 та 4, адже відстані від будь-якої з цих точок до трьох інших дорівнюють 3, 4 та 5.

II спосіб. Розглянемо рівнобічну трапецію з довжинами основ 1 і $1+3a$ та довжиною бічної сторони $1+a$, де $a > 0$. Така трапеція існує за умови, що $1+(1+a)+(1+a) > 1+3a$, тобто $0 < a < 2$. Якщо діагональ цієї трапеції дорівнює $1+2a$, то вершини трапеції задовольняють умову задачі. Оскільки трапеція є вписаною, то за теоремою Птолемея її діагональ матиме потрібну довжину за умови, що $1 \cdot (1+3a) + (1+a)^2 = (1+2a)^2$, тобто $3a^2 - a - 1 = 0$. Залишається покласти $a = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ та зауважити, що $0 < \frac{1+\sqrt{13}}{6} < 2$.

9.2. *Відповідь:* ні, не могли.

Припустимо, що всі їжаки дістали різні добутки. Тоді існує рядок або стовпчик, в якому живуть принаймні два їжаки, бо інакше кожен їжак дістав би добуток 1. Розглянемо рядок або стовпчик, у якому найбільше їжаків. Нехай для визначеності у деякому рядку $n \geq 2$ їжаків, а в усіх інших рядках та стовпчиках — не більше за n. Їжаки, які живуть у цьому рядку, дістали n різних добутків вигляду nk, де $k \leq n$, бо у кожному стовпчику не більше за n їжаків. Тому у рядку зустрічаються всі добутки n, $2n$, $\ldots$, n^2. Їжак, який дістав добуток n^2, живе у стовпчику з n їжаками. Аналогічно до попередніх міркувань у цьому стовпчику теж зустрічаються всі добутки n, $2n$, $\ldots$, n^2. Але це означає, що два різні їжаки дістали добуток n, суперечність.

9.3. Нехай F, G — середини AC та AB відповідно (рис. 3). Тоді точки A, O, X, Y, F, G лежать на колі з діаметром AO. Оскільки за умовою $\angle GAX = \angle FAY$, то хорди GX та FY є рівними, звідки $XY \parallel FG \parallel BC$. Нехай S — середина AO. Оскільки проекціями точок A та O на BC є точки D та E відповідно, то проекцією точки S на BC є середина DE. Отже, точка S лежить на серединному перпендикулярі до DE. Але S лежить і на серединному перпендикулярі до XY, причому $XY \parallel DE$. Тому відрізки DE та XY мають спільний серединний перпендикуляр. Звідси $DEXY$ — рівнобічна трапеція або прямокутник, а отже точки D, E, X, Y лежать на одному колі.

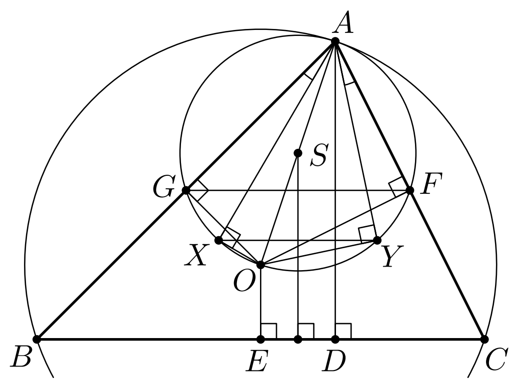

Рис. 3.

9.5. *Відповідь:* 2^{50} способами.

Помітимо, що якщо змінити першу цифру у верхньому рядку, то зміняться перші цифри у всіх рядках трикутника. При цьому у кожному рядку трикутника зміниться парність кількості одиниць. Тому достатньо визначити, скількома способами можна заповнити верхній рядок так, аби у кожному з рядків трикутника кількість одиниць була парною. Згідно розв'язання задачі 8.5 дістаємо 2^{50} способів.

10.2. Без обмеження загальності $(3a-bc)(3b-ac)(3c-ab) > 0$, інакше нерівність очевидно виконується. Покажемо, що тоді усі три числа $3a-bc$, $3b-ac$ та $3c-ab$ додатні. Справді, якщо це не так, то серед цих чисел є два від'ємних. Нехай, наприклад, $3a-bc < 0$ та $3b-ac < 0$. Тоді $(3a-bc)+(3b-ac) = (a+b)(3-c) = (a+b)^2 < 0$, суперечність.

За нерівністю між середніми

$$\sqrt{(3a-bc)(3b-ac)} \le \frac{1}{2}\big((3a-bc)+(3b-ac)\big) = \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

аналогічно $\sqrt{(3b-ac)(3c-ab)} \le \frac{1}{2}(b+c)^2$ та $\sqrt{(3a-bc)(3c-ab)} \le \frac{1}{2}(a+c)^2$. Звідси

$$(3a-bc)(3b-ac)(3c-ab) \le \frac{1}{8}(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2 \le 8,$$

оскільки знову за нерівністю між середніми

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)} \le \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} = \frac{2(a+b+c)}{3} = 2.$$

10.3. *Відповідь:* ні.
Покажемо, що якщо число $2n-1$ просте, то шуканих n чисел не існує.

Припустимо, що існує набір з n цілих чисел, які задовольняють умову. Якщо набір містить числа a та b, то кожне з чисел a^2+a та b^2+b дорівнює сумі всіх чисел набору. Отже, $a^2+a=b^2+b$, тобто $(a-b)(a+b+1)=0$. Тому якщо $b\neq a$, то $b=-a-1$. Таким чином, набір має складатися лише з певної кількості чисел a та певної кількості чисел $-a-1$. Нехай у наборі є k чисел a та $n-k$ чисел $-a-1$, де $0<k<n$. Без обмеження загальності можна вважати, що $a\geq -a-1$, звідки $a\geq 0$.

За умовою $a^2=(k-1)a+(n-k)(-a-1)$, або $(2a+1)k=a^2+a+n(a+1)=(a+n)(a+1)$. Звідси $k=\frac{(a+n)(a+1)}{2a+1}$. Оскільки числа $a+1$ та $2a+1$ взаємно прості, то $a+n$ має ділитися на $2a+1$. Тоді $2(a+n)-(2a+1)=2n-1$ теж ділиться на $2a+1$. Але число $2n-1$ просте, отже $2a+1=1$ або $2a+1=2n-1$, тобто $a=0$ або $a=n-1$. У обох випадках дістаємо $k=n$, суперечність.

10.5. Нехай S' — точка на прямій BC, для якої $S'I\perp AI$, та IP' — висота прямокутного трикутника AIS' (рис. 4). Тоді $S'I^2=S'P'\cdot S'A$. За теоремою про "тризуб" W — центр описаного кола трикутника BIC. Оскільки $S'I$ — дотична до цього кола, то $S'B\cdot S'C=S'I^2=S'P'\cdot S'A$. Звідси випливає, що точка P' лежить на ω, а отже $P'=P$ та $S'=S$. Таким чином, $SI\perp AI$, тобто $SI\parallel DE$ та $DSIE$ — трапеція. Аби показати, що ця трапеція є рівнобічною, достатньо довести, що $\angle SDE=\angle IED$.

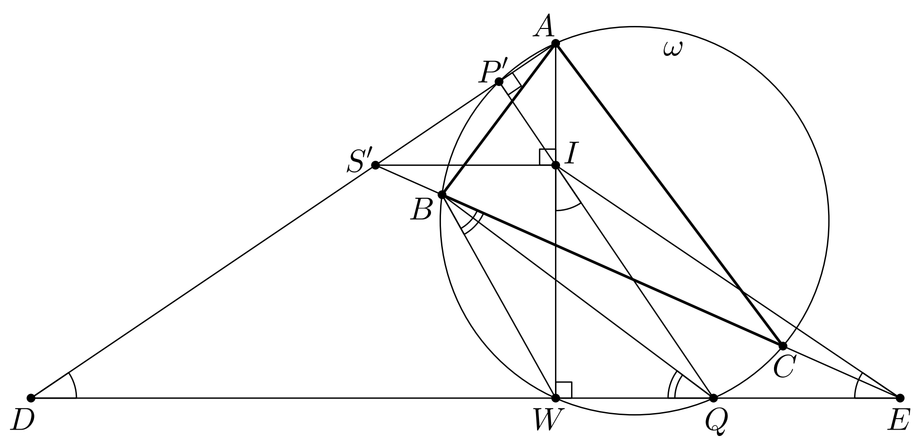

Рис. 4.

Нехай PI вдруге перетинає ω в точці Q. Оскільки $\angle APQ=90^\circ$, то AQ — діаметр кола ω, звідки $\angle AWQ=90^\circ$ та Q лежить на прямій DE. Оскільки $\angle SDE=\angle QIW$ як кути із взаємно перпендикулярними сторонами, залишається довести, що $\angle QIW=\angle IEQ$. Для цього достатньо показати, що прямокутні трикутники WQI та WIE подібні.

Оскільки трикутники WQB та WBE подібні (кут при вершині W спільний та $\angle WBE=\angle WBC=\angle WCB=\angle WQB$), то $WB/WQ=WE/WB$. Але за теоремою про "тризуб" $WB=WI$. Отже, $WI/WQ=WE/WI$ та прямокутні трикутники WQI та WIE подібні, що завершує доведення.