Дванадцятий Київський математичний фестиваль

В. Брайман[1], *І. Мартюшова*[2], *О. Руденко*[3]

З 8 по 11 травня цього року в місті Києві відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8-10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Учасники фестивалю проживали у дитячому навчально-оздоровчому таборі "Дніпро", у мальовничому передмісті Києва — Конча-Заспі.

Цього року у фестивалі взяли участь українські команди Харківського фізико-математичного ліцею №27, НВК № 45 "Академічна гімназія" (м. Харків), Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, Львівського фізико-математичного ліцею, фізико-математичної гімназії №17 (м. Вінниця), гімназії №28 (м. Запоріжжя), збірної м. Чернігова "Сіверяни" та київські команди Українського фізико-математичного ліцею, гімназії №178, природничо-наукового ліцею №145 та, звісно, ліцею "Лідер". Білорусь представляла команда ліцею БДУ (м. Мінськ), Грузію — команда 42-ої фізико-математичної школи ім. академіка І. Векуа (м. Тбілісі), Естонію — команда Тинісмяеської реальної школи (м. Таллінн), Росію — команда ЦДО "Дистантне навчання" Kostroma Open, команда фізико-математичної школи № 2007 (м. Москва) та збірна м. Санкт-Петербургу "Північна Пальміра", Словаччину — команда гімназії ім. Людовіта Штура (м. Тренчин).

Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", лекції науковців, особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Пропонуємо Вашій увазі результати та матеріали змагань фестивалю.

Переможці усної олімпіади (10 клас).

I місце: Діомідов Євген (Русанівський ліцей, Київ), Дубова Софія (ХФМЛ №27), Єфіменко Дмитро (гімназія №178, Київ), Кліцунов Андрій (ліцей БДУ), Марченко Роман (ліцей БДУ), Палько Назарій (ЛФМЛ), Петренко Іван (Kostroma Open), Сергейчик Дмитро (ФМШ №2007, Москва), Смірнов Денис (ХФМЛ №27).

II місце: Бистров Олексій (Kostroma Open), Альохіна Анастасія ("Лідер"), Во Дінь Тхань Фонг (ХФМЛ №27).

III місце: Лукашевич Дмитро (Kostroma Open), Мелентьєва Ада ("Лідер"), Святокум Поліна (ХФМЛ №27), Цинцеус Гліб ("Лідер"), Злобіна Катерина (ФМШ №2007, Москва).

[1]механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка

[2]Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер"

[3]Інститут математики НАН України

Переможці письмової олімпіади

8 клас

I місце: Бондаренко Денис (“Лідер”), Пономарьов Ростислав (ХФМЛ №27), Сіліна Ольга (ХФМЛ №27), Європін Богдан (“Лідер”).

II місце: Аміров Ільдар (“Північна Пальміра”), Аміров Фаріт (“Північна Пальміра”), Бабієнко Ілля (“Лідер”), Балакін Андрій (ФМШ №2007, Москва), Григорьєв Владислав (Kostroma Open), Мінаков Станіслав (АГ №45, Харків), Різник Валерій (АГ №45, Харків), Сердюк Максим (ХФМЛ №27), Трескунов Денис (“Лідер”), Ульяніч Михайло (ХФМЛ №27), Уразовський Андрій (ХФМЛ №27), Фам Хоанг Вієт (ХФМЛ №27).

III місце: Затепякін Михайло (“Північна Пальміра”), Костюшко Антон (“Лідер”), Ратаров Данило (“Лідер”), Уфімцева Софія (АГ №45, Харків), Ківва Ярослав (“Лідер”), Гунько Олександр (гімназія №178, Київ), Демчишин Денис (гімназія №28, Запоріжжя), Закусило Віталій (“Північна Пальміра”), Косюк Іван (“Лідер”), Нгуен Чунг Кионг (“Лідер”), Рибалко Поліна (АГ №45, Харків), Трактинський Віталій (ДОЛІФМП), Тумак Олександра (ЛФМЛ), Щоголєва Анастасія (“Північна Пальміра”), Кернер Пауль (ТРШ, Таллінн).

9 клас

I місце: Альохіна Анастасія (“Лідер”), Вітязь Валентин (Ліцей БДУ), Во Дінь Тхань Фонг (ХФМЛ №27), Дубова Софія (ХФМЛ №27), Жиленко Тарас (ХФМЛ №27), Ніколаєв Олег (ХФМЛ №27), Ошлянський Андрій (“Лідер”), Сергейчик Дмитро (ФМШ №2007, Москва), Смірнов Денис (ХФМЛ №27), Хотяїнцева Наталія (ПНЛ №145, Київ), Яковлев Іван (“Лідер”).

II місце: Гінзбург Михайло (“Північна Пальміра”), Клімчук Ганна (ФМШ №2007, Москва), Ліпартія Ніно (ХФМЛ №27), Пастущак Богдан (ЛФМЛ), Петров Степан (“Північна Пальміра”), Шмельов Артем (“Північна Пальміра”).

III місце: Коляденко Павло (ПНЛ №145, Київ), Казьмін Євген (УФМЛ), Ніколаєв Олександр (Kostroma Open), Башинський Влас (УФМЛ), Сокотун Микита (“Лідер”), Аиазі Філіп (Гімназія ім. Л. Штура, Тренчин), Григор’єв Микита (ПНЛ №145, Київ), Ігнатович Ігор (Kostroma Open), Мелентьєва Ада (“Лідер”), Назаркевич Ганна (ЛФМЛ), Сушко Петро (Kostroma Open), Шуліков Арсеній (ДОЛІФМП).

10 клас

I місце: Палько Назарій (ЛФМЛ), Святокум Поліна (ХФМЛ №27).

II місце: Злобіна Катерина (ФМШ №2007, Москва), Петренко Іван (Kostroma Open), Діомідов Євген (Русанівський ліцей, Київ).

III місце: Бистров Олексій (Kostroma Open), Бродюк Сергій (ЛФМЛ), Воробйов Тимур (ФМШ №2007, Москва), Іванова Кіра (ДОЛІФМП), Кліцунов Андрій (Ліцей БДУ), Кукулянський Антон (Ліцей БДУ), Марченко Роман (Ліцей БДУ), Чорний Михайло (УФМЛ).

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. У 4 ящиках лежать 24 яблука. Хробак-оптиміст впевнений, що може з'їсти не більше половини яблук так, щоб у деяких 3 ящиках яблук стало порівну. Чи може виявитися, що він неправий?

2. При яких натуральних $n \geq 2$ число n^2 можна подати як суму декількох різних натуральних чисел, які не перевищують $2n$?

3. Нехай $ABCD$ паралелограм ($AB < BC$). Бісектриса кута BAD перетинає сторону BC у точці K, а бісектриса кута ADC перетинає діагональ AC у точці F. Відомо, що $KD \perp BC$. Довести, що $KF \perp BD$.

4. Ельза малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них N дорогами. Потім Ельза та Сьюзі по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Ельза). Якщо ці міста сполучені дорогою, то виграє Ельза, а якщо ні, то Сьюзі. Знайти найменше N, при якому Ельза має виграшну стратегію.

5. Чи існують такі натуральні числа $a \neq b$, що $a + b$ є квадратом натурального числа, а $a^3 + b^3$ є четвертим степенем натурального числа?

9 клас

1. Для довільних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a + c \leqslant ac$ та $b + d \leqslant bd$, довести, що $ab + cd \geqslant 8$.

2. При яких натуральних $n \geq 2$ число n^2 можна подати як суму n різних натуральних чисел, які не перевищують $\frac{3n}{2}$?

3. Див. задачу 8.3.

4. Див. задачу 8.4.

5. Див. задачу 8.5.

10 клас

1. Див. задачу 9.2.

2. Для довільних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a + c \leqslant ac$ та $b + d \leqslant bd$, довести, що

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \geq 4.$$

3. Див. задачу 8.3.

4. Сьюзі малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них N дорогами (два міста або сполучені єдиною дорогою, або не сполучені). Потім Сьюзі та Ельза по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Сьюзі). Якщо ці міста сполучені дорогою, то виграє Ельза, а якщо ні, то Сьюзі. Знайти найменше N, при якому Ельза має виграшну стратегію.

5. Див. задачу 8.5.

Автори задач: В. Брайман (8.1, 8.4=9.4∼10.4), М. Рожкова (8.3=9.3=10.3), О. Руденко (8.2∼9.2=10.1, 8.5=9.5=10.5, 9.1∼10.2).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Для додатних чисел x, y і z довести нерівність $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$.

2. На колі ω радіуса r взяли точки A і B такі, що $AB < \sqrt{3}r$. Коло з центром у точці B і радіусом AB перетинає ω у точці C. Всередині кола ω взяли точку P таку, що трикутник ABP є правильним. Пряма CP перетинає ω у точці Q. Довести, що $PQ = r$.

3. Розглянемо правильний трикутник зі стороною n, розділений на трикутники зі стороною 1 як показано на рис. 1. Нехай $f(n)$ — кількість шляхів з верхнього трикутника у середній трикутник у нижньому рядку таких, що кожен наступний трикутник на шляху має спільну сторону з попереднім, і шлях ніколи не йде вгору (з більш низького рядка у більш високий), причому жоден трикутник не проходиться двічі. Приклад при $n = 5$ зображено на рис. 1. Знайти $f(2013)$.

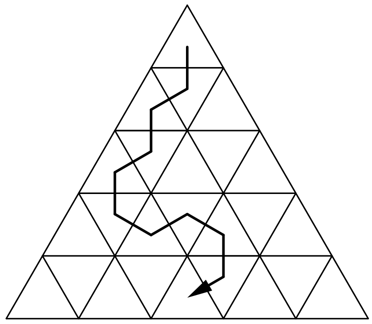

Рис. 1.

4. Розглянемо 70-цифрові числа n такі, що кожна з цифр від 1 до 7 зустрічається у їх записі 10 разів, а цифри 8, 9 та 0 відсутні. Довести, що жодне число такого вигляду не ділиться на жодне інше число цього вигляду.

5. Нехай n — натуральне число. Знайти найбільше невід'ємне число $f(n)$ (що залежить від n) з такою властивістю: для будь-якого набору дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — ціле число, існує таке i, що $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq f(n)$.

6. Нехай S — множина з 9 різних натуральних чисел, усі прості дільники яких не перевищують 3. Довести, що S містить 3 різних числа, добуток яких є точним кубом.

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[4]

1.1. Для фарбування однієї грани кубика потрібно 10 секунд. За який найменший час 6 осіб можуть пофарбувати 101 кубик? (Дві особи не можуть одночасно фарбувати один кубик.)

1.2. Чи існують такі 2013 натуральних чисел, що жодна сума декількох із цих чисел не є квадратом натурального числа?

1.3. В описаному чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC паралельні. Довести, що $AD + BC \geq 2\sqrt{S}$, де S — площа чотирикутника $ABCD$.

1.4. На координатній площині Oxy зобразити множину точок, які задовольняють рівняння $x^3 + y^3 + 3xy = 1$.

2 тур

[4]На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

2.1. Задана функція
$$f(x)=\begin{cases} -x-2, & \text{якщо } x<-1,\\ x, & \text{якщо } x\geq -1.\end{cases}$$
Побудувати графік функції $y=f(f(x))$.

2.2. Які значення може набувати вираз $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$, якщо
$$xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=2?$$

2.3. Через точку A до даного кола проведено дотичні AM і AN (M і N — точки дотику) та пряму, яка перетинає коло у точках P і Q. Нехай L — середина відрізка PQ. Довести, що $\angle MLA=\angle NLA$.

2.4. Довести нерівність $\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{97}-\sqrt{96}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{1}>5$.

3 тур

3.1. Розв'язати у цілих числах рівняння $2(x^2+xy+y^2)=3x-y$.

3.2. Чи можна значення виразу $2(2013^{2014}+1)$ подати як суму квадратів двох натуральних чисел?

3.3. Фігура на площині обмежена чотирьохланковою ламаною $ABCDE$, всі ланки якої рівні, а кути між сусідніми ланками прямі (A,B,C,D — вершини квадрата, D — середина відрізка AE), і дугою AE кола із центром у точці C і радіусом CA (рис. 2). Розріжте цю фігуру на дві рівні фігури.

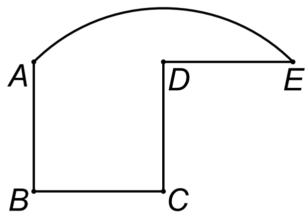

Рис. 2.

3.4. Довести, що не існує нескінченної арифметичної прогресії з ненульовою різницею, яка складається з квадратів натуральних чисел.

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

8.1. *Відповідь:* Може.
Наприклад, якщо в ящиках лежать $0,2,11$ та 11 яблук, то хробаку доведеться з'їсти або щонайменше 13 яблук, щоб в 3 ящиках стало по 0 яблук, або 18 яблук, щоб в 3 ящиках стало по 2 яблука.

8.2. *Відповідь:* При всіх $n\geq 2$.
Індукцією за n неважко довести, що $n^2=1+3+5+\ldots+(2n-1)$. Справді, при $n=1$ це очевидно та якщо при $n=k$ має місце рівність $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$, то при $n=k+1$ дістанемо $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

8.3. Нехай діагоналі паралелограма перетинаються в точці O, а бісектриса кута BAD перетинає діагональ BD у точці E (рис. 3). За властивістю бісектриси $BE/ED=AB/AD<1$. Тому точка E лежить на відрізку BO, $OB=\frac{1}{2}(BE+ED)$ та $OE=$

$\frac{1}{2}(ED - BE)$. Звідси випливає, що $\frac{OE}{OB} = \frac{AD-AB}{AD+AB}$. Аналогічно точка F лежить на відрізку CO та

$$\frac{OF}{OC} = \frac{AD - CD}{AD + CD} = \frac{AD - AB}{AD + AB} = \frac{OE}{OB}.$$

Отже, трикутники BOC та EOF гомотетичні, звідки $EF \parallel BC$. Тому $EF \perp KD$. Далі, $\angle EAD + \angle FDA = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CDA) = 90°$, звідки $AE \perp DF$. Таким чином, F — точка перетину висот трикутника EKD, а тому $KF \perp ED$.

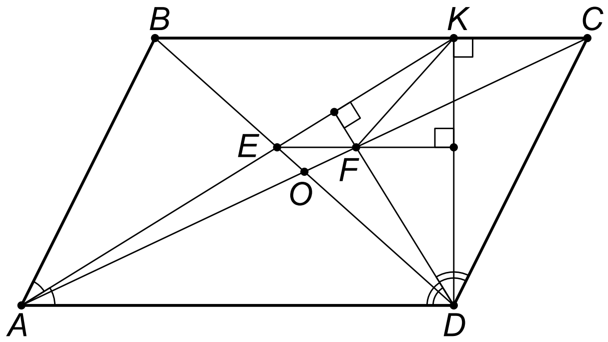

Рис. 3.

8.4. *Відповідь:* $N = 1006$.

При $N = 1006$ виграшну стратегію має Ельза. Вона може розбити всі міста на 1006 пар (одне місто залишиться без пари), а дорогами сполучити міста у кожній парі. Першим ходом Ельза закреслює місто, яке залишилось без пари, а далі завжди закреслює місто, яке утворює пару з містом, щойно закресленим Сьюзі. Тоді наприкінці залишаться два міста з однієї пари, які сполучені дорогою, тобто виграє Ельза.

Покажемо, що при $N \leq 1005$ виграшну стратегію має не Ельза, а Сьюзі. Справді, якщо перед її ходом на карті є хоча б одна дорога, що сполучає два незакреслених міста, Сьюзі може закреслити одне з них. Тоді після кожного ходу Сьюзі зменшується кількість доріг, які сполучають незакреслені міста (за умови, що перед її ходом принаймні одна така дорога була). Під час гри Ельза закреслює 1006 міст, а Сьюзі — 1005 міст. Тому при $N \leq 1005$ на карті не залишиться жодної дороги між незакресленими містами, тобто Сьюзі виграє.

Таким чином, Ельза виграє, якщо на карті буде щонайменше 1006 доріг (зрозуміло, що тоді вона виграє і при всіх $N \geq 1006$.)

8.5. *Відповідь:* Існують.

Наприклад, умову задачі задовольняють числа $a = 8(8^3 + 3^3)$, $b = 3(8^3 + 3^3)$, для яких

$$a + b = (8 + 3)^2(8^2 - 8 \cdot 3 + 3^2) = 77^2, \quad a^3 + b^3 = (8^3 + 3^3)^4.$$

Зауваження. Покажемо, як побудувати шукані числа. Якщо числа a та b мають спільний дільник d, то $a = nd$, $b = kd$, де n, k — деякі натуральні числа. Звідси $a^3 + b^3 = (n^3 + k^3)d^3$, а отже при $n^3 + k^3 = d$ дістанемо, що $a^3 + b^3 = d^4$. Таким чином, числа a та b доцільно шукати у формі $a = n(n^3 + k^3)$, $b = k(n^3 + k^3)$. Тоді

$$a + b = (n + k)(n^3 + k^3) = (n + k)^2(n^2 - nk + k^2).$$

Залишилось знайти натуральні числа $n \neq k$, для яких $n^2 - nk + k^2$ є повним квадратом. Нехай $n^2-nk+k^2 = (n-l)^2$, де l — натуральне число. Тоді $(k-2l)n = k^2-l^2$, звідки $n = \frac{k^2-l^2}{k-2l}$. Найпростіший спосіб забезпечити, аби n було цілим — покласти $k = 2l+1$, тоді $n = (2l+1)^2 - l^2 = 3l^2 + 4l + 1$. Зокрема при $l = 1$ дістаємо $k = 3$, $n = 8$.

9-й клас

9.1. Зауважимо, що $(a+c)^2 \geq 4ac \geq 4(a+c)$, а отже $a + c \geq 4$. Аналогічно $b + d \geq 4$. Таким чином,

$$ab + cd \geq 2\sqrt{abcd} \geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq 8.$$

9.2. *Відповідь:* При всіх $n \geq 2$.
Розглянемо окремо парні та непарні n.

Якщо $n = 2k+1$, то

$$n^2 = (2k+1)^2 = (k+1) + (k+2) + \ldots + (3k+1)$$

(тут записано суму арифметичної прогресії, яка складається з $2k+1$ послідовних натуральних чисел від $k+1$ до $3k+1$).

Якщо $n = 2k$, то

$$n^2 = 4k^2 = k + (k+1) + \ldots + (2k-1) + (2k+1) + \ldots + (3k-1) + 3k$$

(справді, якщо додати до записаної суми число $2k$, то дістанемо арифметичну прогресію з $2k+1$ послідовних натуральних чисел від k до $3k$, сума якої дорівнює $4k^2 + 2k$).

10-й клас

10.2. Зауважимо, що

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+d}{cd} + \frac{d+a}{da} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = 2\left(\frac{a+c}{ac} + \frac{b+d}{bd}\right) \leq 4.$$

Для довільних додатних чисел x_1, x_2, x_3, x_4 виконується нерівність

$$\big(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\big)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \geq 16.$$

Тому

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \geq$$
$$\geq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a}\right)\left(\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+d}{cd} + \frac{d+a}{da}\right) \geq 4.$$

10.4. *Відповідь:* $N = \frac{2013\cdot2012}{2} - 1005 = 2024073.$

Якби кожні два міста були сполучені дорогою, то було би проведено $\frac{2013\cdot2012}{2}$ доріг. Якщо деякі два міста не сполучено дорогою, то будемо казати, що їх сполучено антидорогою. Розглянемо допоміжну карту, на якій замість доріг зображено антидороги. Тоді гру з умови задачі можна переформулювати так: Сьюзі малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них антидорогами. Потім Сьюзі та Ельза по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Сьюзі). Якщо ці міста сполучені антидорогою, то виграє Сьюзі, а якщо ні, то Ельза. Але це — гра з задачі 8.3, в якій дівчата помінялись місцями. Тому Ельза має виграшну стратегію для певної кількості антидоріг тоді та лише тоді, коли в задачі 8.3 для такої кількості доріг стратегію має Сьюзі, та навпаки. Отже, Ельза має виграшну стратегію, якщо антидоріг 1005 або менше, а Сьюзі — якщо антидоріг 1006 або більше.

Таким чином, Ельза виграє, якщо на карті буде щонайбільше 1005 антидоріг, тобто щонайменше $\frac{2013\cdot2012}{2} - 1005$ доріг.

Усна математична олімпіада

1. Зауважимо, що
$$x^2 \geq 4x - 4, \quad y^2 \geq 4y - 4, \quad z^2 \geq 4z - 4.$$
Тоді
$$\begin{aligned} x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq& (4x-4) + x(4y-4) + xy(4z-4) = \\ =& 4x - 4 + 4xy - 4x + 4xyz - 4xy = 4xyz - 4. \end{aligned}$$

2. Нехай O — центр кола ω (рис. 4). Позначимо $\angle PCB = \angle CPB = \alpha$. Чотирикутник $QABC$ є вписаним, тому $\angle BAQ = 180^\circ - \alpha$, звідки $\angle PAQ = 120^\circ - \alpha$. Також $\angle APQ = 180^\circ - \angle APB - \angle BPC = 120^\circ - \alpha$, тому $AQ = PQ$ і $\angle AQC = 2\alpha - 60^\circ$. Знову скориставшись тим, що $QABC$ вписаний, отримаємо, що $\angle ABC = 180^\circ - \angle AQC = 240^\circ - 2\alpha$. Трикутники OAB і OCB рівні, оскільки $OA = OB = OC = r$ і $AB = BC$. Тому $\angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2}\angle ABC = 120^\circ - \alpha$. Залишилось помітити, що трикутники AQP та AOB рівні, бо $\angle PAQ = \angle BAO = \angle APQ = \angle ABO$ та $AP = AB$. Звідси $QP = OB = r$.

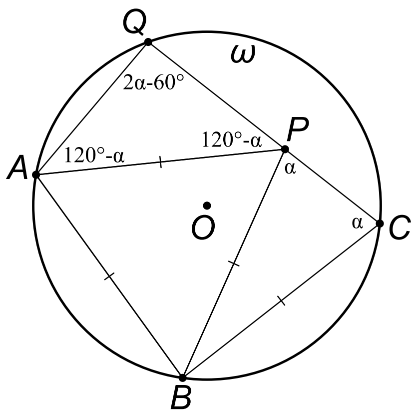

Рис. 4.

3. *Відповідь:* 2012!

Покажемо, що $f(n) = (n-1)!$ Позначимо горизонтальні відрізки у трикутнику $l_1, l_2, \ldots$ як на рис. 5. Очевидно, що кожен шлях перетинає кожну з ліній $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ рівно один раз. Діагональні лінії розбивають l_k на k одиничних відрізків, і шлях перетинає рівно один з них (на рис. 5 ці відрізки виділено). Шлях однозначно визначається набором з $n-1$ одиничних відрізків, які він перетинає. Оскільки є $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$ способів перетину шляхом $n-1$ горизонтальних ліній, то $f(n) = (n-1)!$ Зокрема $f(2013) = 2012!$

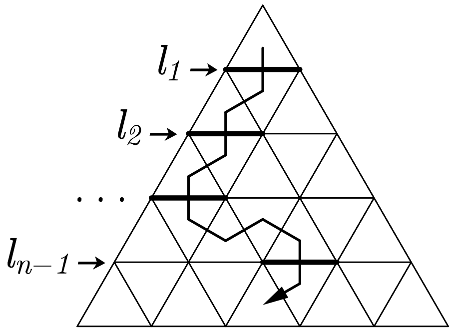

Рис. 5.

4. Припустимо, що числа a та b мають вказаний вигляд, $b > a$ і b ділиться на a. Тоді $b-a$ теж ділиться на a. Сума цифр кожного із чисел a і b дорівнює $10(1+2+\ldots+7) = 280$. Отже, a не ділиться на 3, а $b-a$ ділиться на 9. Але тоді $b-a$ ділиться на $9a$, що неможливо, оскільки число $9a$ є 71-цифровим.

5. *Відповідь:*

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне;} \\ \frac{1}{2n}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Нехай n парне. Тоді якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}$, то сума $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ є цілою та $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| = 0$ для всіх i. Звідси випливає, що $f(n) = 0$ для всіх парних n.

Тепер розглянемо непарне $n = 2m+1$. Нехай $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n}$, тобто

$$\tfrac{n-1}{2n} < a_i < \tfrac{n+1}{2n}, \quad 1 \le i \le n.$$

Тоді

$$m = \tfrac{n-1}{2} < a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \tfrac{n+1}{2} = m+1,$$

а отже сума $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не є цілою, суперечність. Тому $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2n}$ принаймні для одного i.

З іншого боку, якщо $n = 2m+1$ та $a_1 = \ldots = a_{2m+1} = \frac{m}{2m+1}$, то $a_1 + \ldots + a_{2m+1} = m$ та

$$\left|a_i - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} - \tfrac{m}{2m+1} = \tfrac{1}{2(2m+1)} = \tfrac{1}{2n}, \quad 1 \le i \le 2m+1.$$

Тому $f(n) = \frac{1}{2n}$ при всіх непарних n.

6. Розглянемо таблицю 3×3, рядки та стовпчики якої занумеровані числами від 0 до 2. Запишемо кожне число вигляду $2^a 3^b$ з множини S у клітинку, номерами рядка та стовпчика якої є залишки від ділення чисел a та b на 3. У задачі вимагається довести, що деякі три числа опиняться у клітинках, сума номерів рядків та сума номерів стовпчиків яких діляться на 3. Якщо в деякій клітинці записано принаймні три числа, то це очевидно. Надалі припустимо, що у кожній клітинці щонайбільше два числа. Тоді числа є принаймні в 5 клітинках таблиці. Якщо числа є в усіх клітинках деякого рядка або деякого стовпчика, то можна взяти по одному числу з цих клітинок.

Залишилось розглянути випадок, коли у 5 клітинках таблиці є числа, але у кожному рядку та у кожному стовпчику є вільна клітинка. З точністю до перестановки рядків та стовпчиків дістанемо одну з таблиць, зображених на рис. 6 (тут x_1, x_2, x_3 та y_1, y_2, y_3 — деякі перестановки чисел $0, 1, 2$, а клітинки з числами зафарбовані).

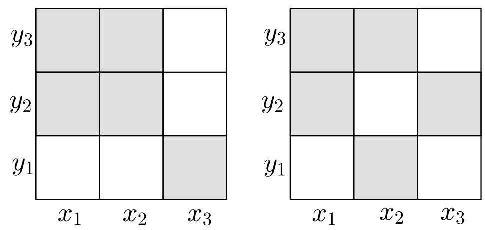

Рис. 6.

Для обох таблиць на рис. 6 знайдуться три клітинки з числами, які знаходяться у попарно різних рядках та стовпчиках, та залишається взяти по одному числу з цих клітинок.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* 1010 сек.
Зрозуміло, що час фарбування буде найменшим, якщо вдасться так розподілити роботу, щоб усі особи працювали від початку до кінця. Це можна зробити, наприклад, таким чином. Спочатку кожна особа фарбує по 15 кубиків, тобто по 90 граней. На це витрачається 900 секунд. Наступні 60 секунд 5 осіб фарбують по 1 кубику, а одна особа — по одній грані 6 кубиків, що залишилися. Нарешті, за останні 50 секунд кожна особа фарбує по 5 граней 6 кубиків, у яких вже пофарбовано одну грань. У цьому випадку на фарбування буде витрачено 1010 сек.
1.2. *Відповідь:* Існують.
Наприклад, умову задовольняють числа $10, 10^3, 10^5, \ldots, 10^{2\cdot 2013-1}$. Будь-яка сума декількох із цих чисел закінчується непарною кількістю нулів, а отже не є квадратом натурального числа.
1.3. З умови випливає, що $ABCD$ — трапеція або ромб. У обох випадках $S = \frac{AD+BC}{2}h$, де h — висота (рис. 7). Очевидно, що $h \leq \frac{AB+CD}{2} = \frac{AD+BC}{2}$. Маємо $\frac{(AD+BC)^2}{4} \geq S$. Звідси $AD + BC \geq 2\sqrt{S}$.

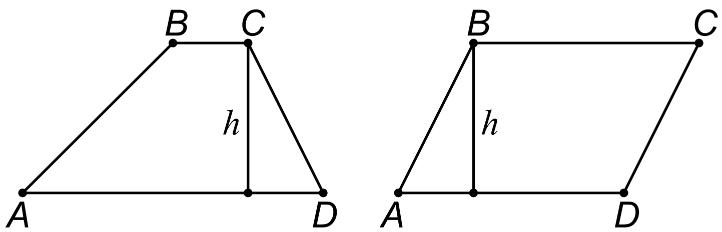

Рис. 7.

1.4. Скористаємося відомою тотожністю

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Маємо $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y) = 0$. Таким чином, дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x + y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + 1 - xy + x + y = 0. \end{array}\right.$$

Перетворимо друге рівняння:

$$2x^2+2y^2+2-2xy+2x+2y=0, \quad (x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2=0,$$

звідки $x=-1$, $y=-1$.

Отже, шукана множина — об'єднання прямої $x+y-1=0$ і точки $(-1;-1)$ (рис. 8).

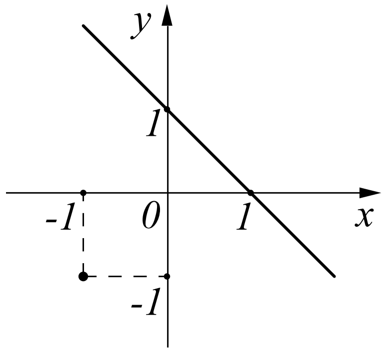

Рис. 8.

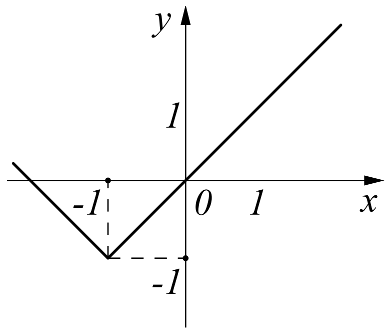

Рис. 9.

2.1. *Відповідь:* Див. рис. 9.
Помітимо, що $f(x)=|x+1|-1$. Тоді

$$f(f(x))=\big||x+1|-1+1\big|-1=|x+1|-1.$$

2.2. *Відповідь:* $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.
Нехай $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=A$. Тоді

$$2+A=xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)\big(\sqrt{y^2+1}+y\big),$$
$$2-A=xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}=\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)\big(\sqrt{y^2+1}-y\big).$$

Враховуючи, що $\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)=\big(\sqrt{y^2+1}+y\big)\big(\sqrt{y^2+1}-y\big)=1$, дістаємо $(2+A)(2-A)=4-A^2=1$, звідки $A^2=3$. Тому $A=\sqrt{3}$ або $A=-\sqrt{3}$. Обидва ці значення досягаються відповідно при $x=\sqrt{3}$, $y=0$ та $x=-\sqrt{3}$, $y=0$.

2.3. Позначимо O центр даного кола (рис. 10). Оскільки кожен з кутів OMA, ONA та OLA дорівнює $90°$, то точки A, M, N та L належать колу з діаметром AO. Кути MLA та NLA є вписаними в це коло і спираються на рівні хорди AM та AN.

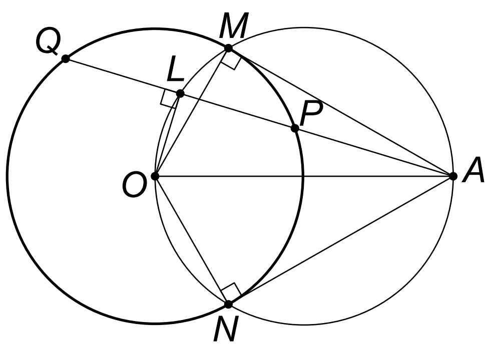

Рис. 10.

2.4. Позначимо S ліву частину нерівності, яку слід довести. Для кожного $a \geq 0$ маємо

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{a+1}} = \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{99} - \sqrt{98} &> \sqrt{100} - \sqrt{99}, \\ \sqrt{97} - \sqrt{96} &> \sqrt{98} - \sqrt{97}, \\ &\dots \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} &> \sqrt{4} - \sqrt{3}, \\ \sqrt{1} - \sqrt{0} &> \sqrt{2} - \sqrt{1}. \end{aligned}$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо $S > \sqrt{100} - S$. Звідси $2S > 10$, тобто $S > 5$.

3.1. *Відповідь:* (2; −2), (0; 0).

Запишемо дане рівняння у вигляді $2x^2 + (2y-3)x + 2y^2 + y = 0$ та розглянемо його як квадратне відносно x. Визначимо, при яких значеннях y дискримінант цього рівняння є невід'ємним. Маємо $D = 4y^2 - 12y + 9 - 16y^2 - 8y = -12y^2 - 20y + 9$.

Розв'язком нерівності $-12y^2 - 20y + 9 \geq 0$ є проміжок $\left[\frac{-10-\sqrt{208}}{12}; \frac{-10+\sqrt{208}}{12}\right]$. Цей проміжок містить тільки три цілі числа: $-2, -1, 0$.

При $y = -2$ маємо $2x^2 - 7x + 6 = 0$, звідки $x = 2$ або $x = \frac{3}{2}$.

При $y = -1$ маємо $2x^2 - 5x + 1 = 0$, корені цього рівняння не є цілими.

При $y = 0$ маємо $2x^2 = 3x$, звідки $x = 0$ або $x = \frac{3}{2}$.

3.2. *Відповідь:* Можна.

Нехай $2013^{1007} = 2k + 1$. Тоді

$$2((2k+1)^2 + 1) = 8k^2 + 8k + 4 = 4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 = (2k)^2 + (2k+2)^2.$$

3.3. Потрібне розрізання зображене на рис. 11. Лінія розрізу — ламана CMK — є образом ламаної CBA при повороті на кут 45° за годинниковою стрілкою з центром у точці C.

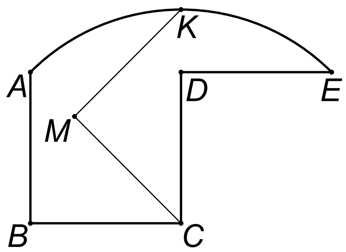

Рис. 11.

3.4. Нехай числа $a_n^2, a_{n+1}^2, a_{n+2}^2$ — послідовні члени арифметичної прогресії (a_n, a_{n+1}, a_{n+2} — натуральні числа). Тоді $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2$. Звідси

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+2} + a_{n+1}).$$

Оскільки $a_{n+1} + a_n < a_{n+2} + a_{n+1}$, то $a_{n+1} - a_n > a_{n+2} - a_{n+1}$. Це означає, що послідовність $b_n = a_{n+1} - a_n$, яка складається з натуральних чисел, є спадною, а така послідовність не може бути нескінченною.