Одинадцятий Київський математичний фестиваль

В. Брайман[1], *І. Мартюшова*[2], *О. Руденко*[3]

З 29 квітня по 2 травня цього року у мальовничому передмісті Києва — Конча-Заспі — відбувся традиційний Київський міжнародний математичний фестиваль для команд 8-10 класів учбових закладів з поглибленим вивченням математики та природничих наук. Фестиваль проводиться починаючи з 2002 року з ініціативи Інституту математики НАН України, фізико-технічного інституту НТУУ "КПІ", Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" та за підтримки Печерської районної державної адміністрації і Головного управління освіти і науки м. Києва. Вчетверте фестиваль проходив під патронатом Національної комісії України у справах ЮНЕСКО. Цього року у фестивалі взяли участь 17 команд з України, Росії, Білорусі, Молдови, Румунії та Словаччини. Особливістю фестивалю є насичена математична — і не тільки — програма: усна та письмова математичні олімпіади, "Математичний експрес", "Математична карусель", особисті та командні конкурси з фізики, змагання "Що? Де? Коли?", екскурсії по місту тощо.

Умови задач

Олімпіада

8 клас

1. Чи можна розмістити на площині 2012 різних кіл з однаковим діаметром таким чином, щоб кожне коло дотикалось як мінімум до трьох інших?

2. Нехай O — центр та R — радіус кола ω, описаного навколо трикутника ABC. Коло ω_1 з центром O_1 та радіусом R проходить через точки A, O та перетинає сторону AC в точці K. Нехай AF — діаметр кола ω та точки F, K, O_1 лежать на одній прямій. Знайти $\angle ABC$.

3. Сто срібних монет викладено в одну лінію. Чарівник може перетворити срібну монету в золоту за 3 секунди. Кожна золота монета, яка знаходиться поруч із монетою, що перетворюється, зменшує цей час на 1 секунду. За який найменший час чарівник може перетворити всі монети в золоті?

4. Знайти всі такі натуральні числа a, b, c більші за 1, що $ab + 1$ ділиться на c, $bc + 1$ ділиться на a та $ca + 1$ ділиться на b.

5. Декілька учнів різного зросту стоять у ряд. Якби вони вишикувалися за зростом так, щоб справа стояв найвищий, то кожен учень змістився б не більше, ніж на 8 позицій. Довести, що праворуч від кожного учня стоїть щонайбільше 8 учнів, які нижчі за нього.

9 клас

1. Див. задачу 8.1.

[1]механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка

[2]Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер"

[3]Інститут математики НАН України

2. Для додатних x, y, z виконується $x + y + z \leq 1$. Довести, що
$$(\tfrac{1}{x} - 1)(\tfrac{1}{y} - 1)(\tfrac{1}{z} - 1) \geq 8.$$
3. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки D та E відповідно так, що $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ та чотирикутник $BDEC$ вписаний. Чи обов'язково трикутник ABC є рівнобедреним?
4. Див. задачу 8.4.
5. У шахті з нескінченною кількістю рівнів видобуває руду скінченна кількість гномів. Щодня в один і той же час один гном з кожного рівня, на якому знаходиться рівно $n = 2, 3, \ldots$ гномів, опускається на $n - 1$ рівнів нижче. Довести, що починаючи з деякого моменту на кожному рівні буде не більше одного гнома.

10 клас

1. Чи можна розмістити на площині 2012 різних кіл з однаковим діаметром таким чином, щоб кожне коло дотикалось рівно до трьох інших?
2. Див. задачу 9.3.
3. Для додатних x, y, z виконується $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1$. Довести, що
$$(\tfrac{1}{x} - 1)(\tfrac{1}{y} - 1)(\tfrac{1}{z} - 1) \geq 9\sqrt{6} - 19.$$
4. Див. задачу 8.4.
5. У шахті з нескінченною кількістю рівнів видобуває руду скінченна кількість гномів. Щодня в один і той же час один гном з кожного рівня, на якому знаходиться рівно $n = 1, 2, 3, \ldots$ гномів, опускається на n рівнів нижче. Довести, що починаючи з деякого моменту на кожному рівні буде не більше одного гнома.

Автори задач: В. Брайман (9.3=10.2), О. Рибак (8.5), М. Рожкова (8.2), О. Руденко (8.1=9.1~10.1, 8.3, 9.2~10.3, 9.5~10.5).

Усна математична олімпіада (10 клас)

1. Джон покрив сірниками однакової довжини всі сторони деякого паралелограма. Також він виявив, що міг би покрити і діагоналі цього паралелограма, використавши 7 і 9 сірників відповідно. Скількома сірниками Джон покрив сторони?
2. Знайти усі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які при всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умову
$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$
3. На сторонах AB і AC трикутника ABC відмітили такі точки K і L відповідно, що $BK = CL$. Нехай P — точка перетину відрізків BL і CK, а M — така внутрішня точка відрізка AC, що пряма MP паралельна бісектрисі кута BAC. Довести, що $CM = AB$.
4. У школі навчаються 2012 хлопчиків і 2012 дівчаток. Кожен учень відвідує не більше 100 гуртків. Відомо, що будь-які два учні протилежної статі відвідують хоча б один спільний гурток. Довести, що є гурток, який відвідують принаймні 11 хлопчиків та 11 дівчаток.
5. Різниця кубів двох послідовних натуральних чисел дорівнює n^2, де n — натуральне число. Довести, що n можна подати як суму двох квадратів.
6. Назвемо таблицю $m \times n$ $(4 \leq m \leq n)$ *гарною*, якщо в кожну її клітинку можна записати число 0 або 1 так, що

1) не всі числа в таблиці є однаковими;

2) кількість одиниць в усіх квадратах 3×3 однакова;

3) кількість одиниць в усіх квадратах 4×4 однакова.

Знайти всі пари натуральних чисел (m, n), $4 \le m \le n$, для яких існує гарна таблиця $m \times n$.

Упорядник завдань: І. Мартюшова.

Математичний експрес (8-9 класи)

1 тур[4]

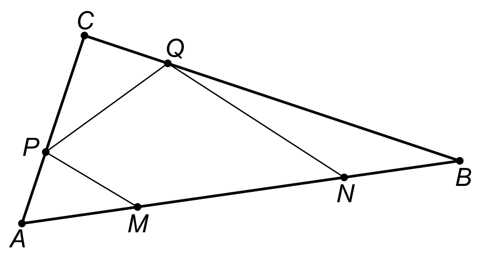
1.1. Різні числа x та y є такими, що $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$. Знайти значення, яких може набувати вираз $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

1.2. Натуральне число, цифри якого йдуть у порядку зростання (зліва направо), помножили на 9. Яких значень може набувати сума цифр отриманого числа?

1.3. Про числа a, b та c відомо, що $a + b + c = 4$ та $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Якого найбільшого значення може набувати a?

1.4. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмітили точки M і N так, що $AM = BN$ (див. рисунок). На катетах AC і BC відмітили точки P і Q відповідно. Довести, що

$$MP + PQ + QN \ge AB.$$



2 тур

2.1. Знайти всі пари чисел (x, y), які задовольняють рівняння

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + y^2 + 2.$$

2.2. Про натуральні числа a, b та c відомо, що $a + b + c = 878$. Якою найбільшою кількістю нулів може закінчуватися десятковий запис числа abc?

2.3. Взвод складається з 24 солдатів. Кожного дня на чергування заступають троє солдатів. Чи можна скласти графік чергувань так, щоб будь-які два солдати чергували разом рівно один раз?

2.4. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AC = 2AB$. Серединний перпендикуляр до діагоналі BD перетинає сторону BC у точці M. Знайти відношення $BM : MC$.

3 тур

3.1. Знайдіть усі прості числа, які можна подати у вигляді суми двох складених чисел.

3.2. У трапеції $ABCD$ довжина бічної сторони AB дорівнює сумі довжин основ BC і AD. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів A та B належить стороні CD.

3.3. Розв'яжіть у натуральних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 = 4(y^4 + z^4), \\ x^2 = 2(y + z). \end{cases}$$

[4] На виконання завдань кожного туру командам відводиться 25 хвилин.

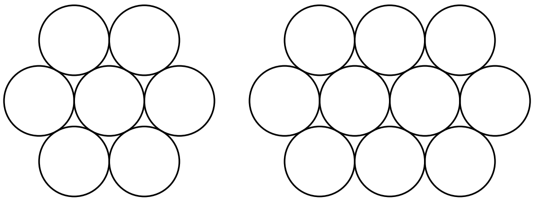
3.4. Про многочлен $P(x) = x^{2012} + a_1x^{2011} + \ldots + a_{2011}x + a_{2012}$ відомо, що $P(1) = P(-1)$, $P(2) = P(-2), \ldots, P(1006) = P(-1006)$. Чи можна стверджувати, що для всіх дійсних значень x виконується рівність $P(x) = P(-x)$?

Упорядники завдань: В. Полонський та М. Якір.

Розв'язки та вказівки.

Олімпіада

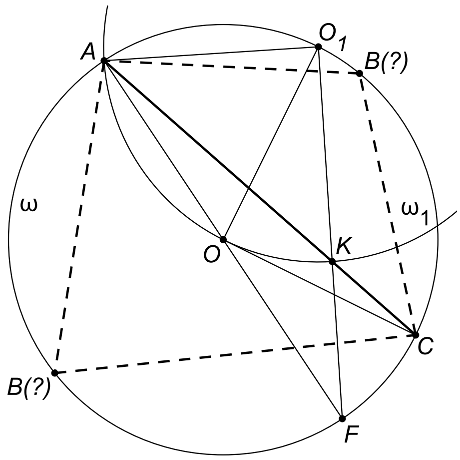
8.1. *Відповідь:* Так, можна.
На рисунку показано, як розмістити потрібним чином 7 або 10 кіл. Залишилось розбити 2012 кіл на 6 груп по 7 кіл та 197 груп по 10 кіл.



8.2. *Відповідь:* $75°$ або $105°$.
Зрозуміло, що трикутник AOO_1 рівносторонній, а отже $\angle AO_1O = 60°$, та $\angle AO_1F = 90°$. Звідси $\angle OO_1K = 90° - 60° = 30°$ та

$$\angle OAC = \angle OAK = \tfrac{1}{2}\angle OO_1K = 15°.$$

Тоді з рівнобедреного трикутника AOC знаходимо $\angle AOC = 180° - 15° - 15° = 150°$. В залежності від того, на якій дузі кола ω лежить точка B, маємо або $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 75°$, або $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC = 105°$.



8.3. *Відповідь:* За 201 секунду.
I спосіб. Простежимо за зміною під час перетворень величини $S = 3n - m$, де n — кількість золотих монет, а m — кількість пар сусідніх золотих монет у даний момент часу. При перетворенні однієї монети можливі три випадки.

1) Поруч з монетою, яка перетворюється, немає золотих монет. В цьому випадку перетворення відбувається за 3 секунди, n збільшується на 1, а m не змінюється.

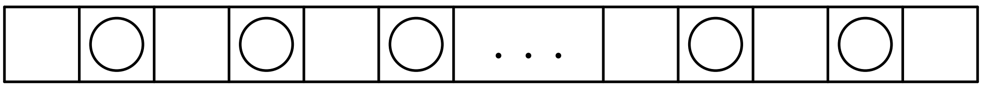
2) Поруч з монетою, яка перетворюється, є одна золота монета. Тоді перетворення відбувається за 2 секунди, n збільшується на 1 та m збільшується на 1.

3) Поруч з монетою, яка перетворюється, є дві золоті монети. Тоді перетворення відбувається за 1 секунду, n збільшується на 1 та m збільшується на 2.

Таким чином, під час перетворення кожної монети величина S завжди збільшується на кількість секунд, необхідну для її перетворення. Оскільки для ряду зі 100 срібних монет $S = 0$, а для ряду зі 100 золотих монет $S = 3 \cdot 100 - 99 = 201$, то на всі перетворення витрачається 201 секунда при будь-якій послідовності перетворень.

II спосіб. Покажемо індукцією за n, що незалежно від послідовності дій чарівника перетворення ряду з n срібних монет в золоті відбувається рівно за $2n+1$ секунду. При $n=1$ це очевидно. Припустимо, що твердження доведено для всіх $n<k$, та встановимо його для $n=k$. Розглянемо монету, яку чарівник перетворить останньою. Якщо це одна з двох крайніх монет, то чарівник спочатку перетворює на золото ряд з $k-1$ монет, витрачаючи на це за припущенням індукції $2k-1$ секунду, а потім за 2 секунди перетворює останню монету, тобто усі перетворення відбуваються за $(2k-1)+2=2k+1$ секунду. Якщо ж остання монета не є крайньою, то зліва та справа від неї знаходяться i та j монет, де $i+j=k-1$. У цьому випадку на перетворення рядів з i та j монет чарівник витрачає $2i+1$ та $2j+1$ секунд відповідно, а потім за 1 секунду перетворює останню монету, тобто перетворення теж відбуваються за $(2i+1)+(2j+1)+1=2(k-1)+3=2k+1$ секунду, що завершує доведення. При $n=100$ дістаємо відповідь на питання задачі.

III спосіб. Розглянемо смугу, яка складається з 201 квадратів, та покладемо 100 срібних монет по одній у кожен другий квадрат (див. рисунок). Коли чарівник перетворює деяку монету в золоту, будемо фарбувати квадрат, у якому вона знаходиться, та два сусідні квадрати (за умови, що їх ще не зафарбовано).



Зрозуміло, що тоді на перетворення кожної монети чарівник витрачатиме стільки секунд, скільки ми фарбуємо квадратів, а всі монети стануть золотими, коли будуть пофарбовані всі квадрати. Тому на це знадобиться рівно 201 секунда.

8.4. *Відповідь:* a, b, c — довільна перестановка чисел 2, 3, та 7.

Покажемо, що числа a, b та c попарно різні. Справді, якщо, наприклад, $a=b>1$, то $ac+1$ не ділиться на b. Надалі внаслідок симетрії можна без обмеження загальності вважати, що $a<b<c$.

За умовою добуток

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1)=a^2b^2c^2+a^2bc+b^2ac+c^2ab+ab+bc+ac+1$$

має ділитися на abc, отже $ab+bc+ac+1=kabc$, де k — деяке натуральне число. Розділивши обидві частини цієї рівності на abc, отримаємо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=k.$$

Оскільки $a,b,c\geq 2$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<2,$$

тому $k=1$.

Припустимо, що $a>2$. Тоді $a\geq 3$, $b\geq 4$, $c\geq 5$ та

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}<1,$$

суперечність. Отже, $a = 2$. Повертаючись до рівності $ab+bc+ac+1 = kabc$, отримуємо $2(b+c)+bc+1 = 2bc$, або $(b-2)(c-2) = 5$. Оскільки $b < c$, то $b-2 = 1$ та $c-2 = 5$, тобто $b = 3$, $c = 7$. Залишилось зробити перевірку.

8.5. Нехай є n учнів. Занумеруємо їх у порядку зменшення зросту та доведемо твердження задачі для k-го за зростом учня, де $1 \le k \le n$ довільне. Без обмеження загальності $k < n-8$, інакше існує не більше 8 учнів, нижчих за даного, та твердження є очевидним. Розглянемо k найвищих учнів. За умовою кожен з них має стояти на одному з $k+8$ перших місць справа (бо при вишикуванні за зростом кожен з них має стати на одне з k перших місць справа і зміститися не більше, ніж на 8 позицій). Отже, на перших $k+8$ місцях справа стоять k найвищих та ще рівно 8 менших за зростом учнів. Зокрема, k-ий за зростом учень стоїть на одному з перших $k+8$ місць справа, та на цих місцях стоять рівно 8 нижчих за нього учнів. Таким чином, справа від нього стоять щонайбільше 8 менших за зростом учнів, що і вимагалось довести.

9-й клас

9.2. Помножимо обидві частини нерівності на $xyz > 0$ та розкриємо дужки. Після зведення подібних нерівність набуде вигляду

$$1 + xy + yz + zx \ge 9xyz + x + y + z.$$

Двічі використовуючи нерівність Коші, отримуємо

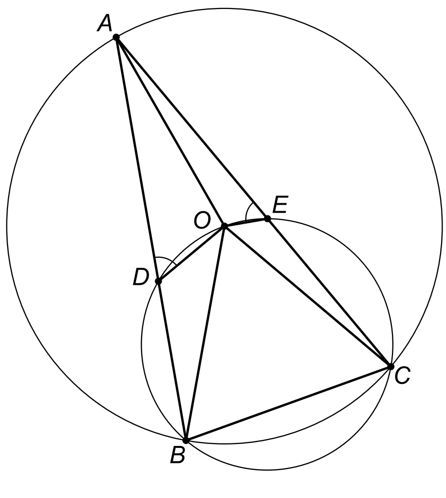
$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \ge 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz,$$

Враховуючи, що $x+y+z \le 1$, дістаємо

$$1 + xy + yz + xz \ge x + y + z + (x+y+z)(xy+yz+xz) \ge x + y + z + 9xyz,$$

що і завершує доведення.

9.3. *Відповідь:* Ні, не обов'язково.



Розглянемо довільний гострокутний трикутник ABC, у якому $\angle BAC = 30°$, та покажемо, що п'ятикутник $BDOEC$ є вписаним. Справді, $\angle BOC = 2\angle BAC = 60°$, тому трикутник BOC рівносторонній. Звідси $\angle BCO = \angle ADO = 60°$, а отже чотирикутник $BDOC$ вписаний. Аналогічно вписаним є чотирикутник $BOEC$, що і завершує доведення. Таким чином, умову задачі задовольняють усі гострокутні трикутники ABC з кутом $\angle BAC = 30°$, серед яких, очевидно, безліч нерівнобедрених.

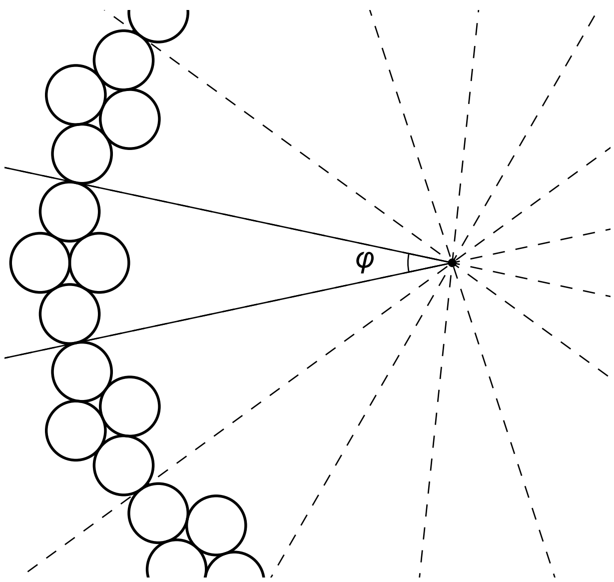
Зауваження. Можна показати, що нерівнобедрений трикутник ABC задовольняє умову задачі рівно у двох випадках: коли він є гострокутним, причому $\angle A = 30°$, та коли один з кутів $\angle B$ або $\angle C$ тупий, причому $|\angle B - \angle C| = 30°$.

9.5. Нехай у шахті працюють N гномів. Доведемо твердження індукцією за N. База індукції очевидна. Розглянемо найвищий рівень, на якому є хоча б один гном. Зауважимо, що гноми ніколи не піднімаються вгору, тому на жодному більш високому рівні гномів і надалі не буде. Якщо на найвищому зайнятому рівні більше одного гнома, то наступного дня там стане рівно на одного гнома менше, а якщо на цьому рівні один гном, то цей гном там і залишиться. Тому щонайбільше через N днів на найвищому рівні буде рівно один гном, який залишиться там назавжди. Це дозволяє розглянути інших $N-1$ гномів, які знаходяться на більш низьких рівнях, та застосувати до них припущення індукції. Твердження доведено.

10-й клас

10.1. *Відповідь:* Так, можна.

Вкажемо, як розташувати на площині $4N$ кіл з однаковим діаметром, де $N \geq 4$ (у нашому випадку $N = 503$), таким чином, щоб кожне коло дотикалось рівно до трьох інших. Для цього достатньо розбити площину на N кутів величиною $\varphi = \frac{2\pi}{N}$ та вписати у кожен з цих кутів фігуру, що складається з 4 кіл, як показано на рисунку.



10.3. Домножимо обидві частини нерівності на $xyz > 0$ та розкриємо дужки. Після зведення подібних нерівність, яку слід довести, набуде вигляду

$$1 + xy + yz + zx \geq 9(\sqrt{6} - 2)xyz + x + y + z.$$

Двічі використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9xyz.$$

Покладемо $u = xy+yz+zx$. За умовою $x^2+y^2+z^2+u \leq 1$, тобто $(x+y+z)^2 \leq 1+u$. Також зауважимо, що за нерівністю трьох квадратів $u = xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$, а тому $u \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + u) \le \frac{1}{2}$. Тоді

$$9(\sqrt{6}-2)xyz + x + y + z \le (\sqrt{6}-2)(x+y+z)u + x + y + z \le \\ \le \big((\sqrt{6}-2)u + 1\big)\sqrt{1+u}.$$

Залишилось довести, що за умови $0 < u \le \frac{1}{2}$ права частина останньої нерівності не перевищує $1 + u$.

Маємо

$$\big((\sqrt{6}-2)u+1\big)\sqrt{1+u} \le 1+u,$$
$$\big((\sqrt{6}-2)u+1\big)^2 \le 1+u,$$
$$(10-4\sqrt{6})u^2 + (2\sqrt{6}-5)u \le 0,$$
$$2u^2 - u \le 0.$$

Остання нерівність при $0 < u \le \frac{1}{2}$, очевидно, виконується.

10.5. Нехай у шахті працюють N гномів. Зрозуміло, що взаємне розташування гномів не зміниться, якщо кожен день після переміщень, описаних в умові задачі, усі гноми будуть одночасно підніматися на один рівень вгору. Тому надалі для зручності будемо вважати, що кожен день в один і той же час з кожного рівня, на якому знаходиться $n \ge 2$ гномів, один гном опускається на $n-1$ рівнів вниз та $n-1$ гномів піднімаються на один рівень вгору, а якщо гном на рівні лише один, то він там і залишається.

Розглянемо найвищий рівень, зайнятий гномами в деякий момент часу (назвемо цей рівень нульовим). Занумеруємо рівні вгору від нульового числами $1, 2, 3, \ldots$ та вниз від нульового числами $-1, -2, -3, \ldots$ Покажемо індукцією за $k \ge 0$, що на рівнях з номерами k та більше можуть опинитися щонайбільше $N-k$ гномів. При $k = 0$ це очевидно. Припустимо, що твердження доведено для $k = i$, та перевіримо його при $k = i+1$. Нехай в деякий день на рівнях з номерами $i+1$ та більше вперше опинились принаймні $N-i$ гномів. Зрозуміло, що напередодні всі ці гноми перебували на рівнях з номерами i та більше, причому деякі з них (позначимо кількість таких гномів l) перейшли з рівня i на рівень $i+1$. Але це означає, що напередодні на рівні i було $l+1$ гномів, а всього на рівнях з номерами i та більше було принаймні $N-i+1$ гномів, що суперечить припущенню індукції. Отже, твердження доведено. Зокрема, на рівнях з номерами N та більше не може опинитися жоден гном.

Розглянемо суму N номерів рівнів, на яких знаходяться гноми. Ця сума не змінюється при переміщеннях гномів, бо зменшення одного з доданків на $n-1$ завжди супроводжується збільшенням $n-1$ доданків на 1. Позначимо цю суму S. Оскільки за доведеним всі доданки в цій сумі не перевищують $N-1$, то жоден доданок не може бути меншим за $S-(N-1)^2$. Отже, на рівнях з номерами меншими за $M = S-(N-1)^2$ також не може опинитися жоден гном.

Нарешті, розглянемо суму N квадратів номерів рівнів, на яких знаходяться гноми. Нехай на рівні з деяким номером k знаходяться $n \ge 2$ гномів. Коли $n-1$ з них перейдуть на рівень $k+1$, а один — на рівень $k-n+1$, сума квадратів номерів рівнів збільшиться за рахунок цих гномів на

$$(n-1)(k+1)^2 + (k-n+1)^2 - nk^2 = n^2 - n \geq 2.$$

Отже, сума квадратів номерів рівнів усіх гномів строго зростає доти, доки хоча б на одному рівні є принаймні два гнома. Проте ця сума, очевидно, не може стати більшою за $N \cdot \max\big((N-1)^2, M^2\big)$, тому починаючи з деякого моменту на кожному рівні буде не більше одного гнома.

Усна математична олімпіада

1. *Відповідь:* 22 сірниками.

Нехай сторони паралелограма можна покрити a та b сірниками відповідно, $a \leq b$. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін, тому $2a^2 + 2b^2 = 7^2 + 9^2 = 130$, тобто $a^2 + b^2 = 65$. Нескладним перебором знаходимо єдині розв'язки $a = 4, b = 7$ та $a = 1, b = 8$, другий з яких відповідає виродженому паралелограму. Отже, Джон покрив сторони паралелограма 4 та 7 сірниками, тобто на всі сторони витратив 22 сірника.

2. *Відповідь:* $f(n) = n,\ n \geq 1$.

Якщо $f(m) = f(n)$, то

$$3m = f(f(f(m))) + f(f(m)) + f(m) = f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n,$$

звідки $m = n$. Отже, f є ін'єкцією. Доведемо індукцією за $n \geq 1$, що $f(n) = n$.

При $n = 1$ маємо

$$f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3.$$

Оскільки $f(1) \geq 1$, $f(f(1)) \geq 1$ та $f(f(f(1))) \geq 1$, то $f(1) = f(f(1)) = f(f(f(1))) = 1$.

Нехай $k \geq 2$ та вже встановлено, що $f(n) = n$ для всіх $n < k$. Внаслідок ін'єктивності функції f при всіх $m \geq k$ маємо $f(m) \geq k$. Зокрема $f(k) \geq k$, звідки $f(f(k)) \geq k$, а отже і $f(f(f(k))) \geq k$. Тоді при $n = k$ з рівності

$$f(f(f(k))) + f(f(k)) + f(k) = 3k$$

дістаємо, що $f(k) = f(f(k)) = f(f(f(k))) = k$, що завершує індукційний перехід.

Залишилось перевірити, що функція $f(n) = n$ задовольняє умову задачі.

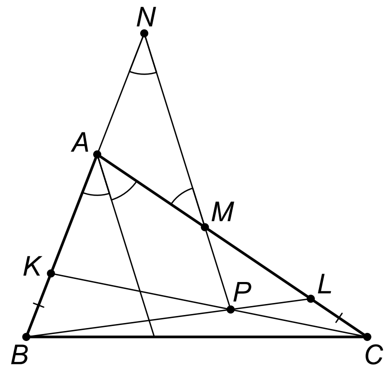
3. *І спосіб.* Нехай прямі PM та AB перетинаються в точці N. Помітимо, що $AN = AM$ (див. рисунок). За теоремою Менелая для трикутника AKC та прямих MP, BL одержуємо

$$\frac{KN}{AN} \cdot \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PK} = 1 = \frac{CP}{PK} \cdot \frac{BK}{BA} \cdot \frac{AL}{LC},$$

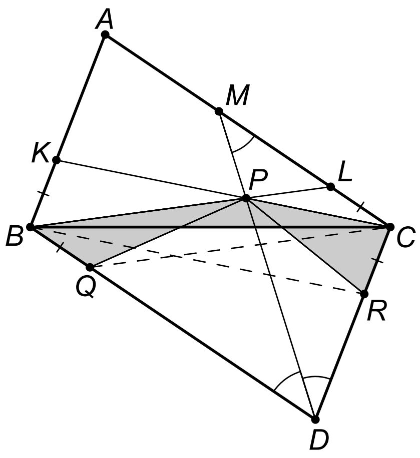
звідки $\frac{KN}{MC} = \frac{AL}{AB}$. Тому

$$\frac{MC}{AB} = \frac{KN}{AL} = \frac{MC+KN}{AB+AL} = \frac{ML+CL+AK+AN}{AK+BK+AM+ML} = 1,$$

тобто $MC = AB$.



II спосіб. Доповнимо трикутник ABC до паралелограма $ABDC$ та відкладемо на його сторонах відрізки $BQ = CR = BK = CL$ (див. рисунок). Тоді $BKCR$ та $BLCQ$ паралелограми, а отже $BP \parallel CQ$, $CP \parallel BR$. Звідси $S_{\triangle BPQ} = S_{\triangle BPC} = S_{\triangle RPC}$. Але тоді у трикутниках BPQ та RPC рівними є висоти, проведені до рівних сторін BQ та RC. Отже, точка P рівновіддалена від сторін кута $\angle BDC$, тобто DP — бісектриса цього кута. Бісектриси кутів $\angle BAC$ та $\angle BDC$ паралельні (або лежать на одній прямій), тому прямі PD та PM збігаються. Звідси трикутник CDM рівнобедрений ($\angle CDM = \angle CMD = \frac{1}{2}\angle BDC$) та $CM = CD = AB$.



4. Нехай є n гуртків A_1, A_2, $\ldots$, A_n, причому гурток A_i відвідують h_i хлопчиків та d_i дівчаток, $i = 1, 2, \ldots, n$. Назвемо *парою* хлопчика та дівчинку, які відвідують деякий гурток. Таким чином, гуртку A_i відповідають $h_i d_i$ пар. Оскільки будь-які два учні протилежної статі відвідують хоча б один спільний гурток, то вони утворюють хоча б одну пару. Тому $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i d_i \geq 2012 \cdot 2012$. Але кожен учень відвідує не більше 100 гуртків, отже

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \leq 2012 \cdot 100, \quad \sum_{i=1}^{n} d_i \leq 2012 \cdot 100.$$

Припустимо, що не існує гуртка, який відвідують принаймні 11 хлопчиків та 11 дівчаток. Тоді при кожному $i = 1, 2, \ldots, n$ маємо $h_i \leq 10$ або $d_i \leq 10$, звідки $h_i d_i \leq 10h_i + 10d_i$. Отже,

$$2012 \cdot 2012 \leq \sum_{i=1}^{n} h_i d_i \leq 10 \sum_{i=1}^{n} h_i + 10 \sum_{i=1}^{n} d_i \leq 10 \cdot 200 \cdot 2012 = 2000 \cdot 2012,$$

суперечність. Таким чином, хоча б один гурток відвідують принаймні 11 хлопчиків та 11 дівчаток.

5. Нехай $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, тоді неважко перевірити, що $3(2m+1)^2 = (2n+1)(2n-1)$. Оскільки числа $2n+1$ та $2n-1$ є взаємно простими, то одне з них є квадратом непарного числа, а інше — потроєним квадратом. Але різниця кубів послідовних натуральних чисел завжди непарна, тому n непарне, а $2n+1$ дає остачу 3 при діленні на 4 та не може бути повним квадратом. Звідси $2n-1$ є квадратом деякого непарного числа. Покладемо $2n-1 = (2t+1)^2$, тоді $n = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t+1)^2$.

6. *Відповідь:* $(4, n)$, $n \geq 4$, та $(5, n)$, $n \geq 5$.

Приклади гарних таблиць $4 \times n$ і $5 \times n$ зображені на рисунку. Доведемо, що не існує гарних таблиць 6×6. Звідси випливатиме, що жодна таблиця $m \times n$, де $m \geq 6$ та $n \geq 6$, не може бути гарною, бо інакше з цієї таблиці можна було б виділити гарну таблицю 6×6.

0	0	0	0	0	0	...	0
0	0	0	0	0	0	...	0
1	1	1	1	1	1	...	1
0	0	0	0	0	0	...	0

0	0	0	0	0	0	...	0
0	0	0	0	0	0	...	0
1	1	1	1	1	1	...	1
0	0	0	0	0	0	...	0
0	0	0	0	0	0	...	0

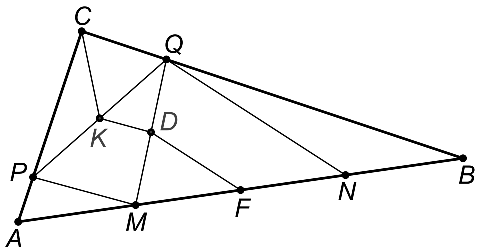
Припустимо, що в кожному квадраті 3×3 гарної таблиці 6×6 міститься a одиниць, де $0 < a < 9$, а в кожному квадраті 4×4 міститься b одиниць. Назвемо кратністю клітинки кількість квадратів 3×3, яким вона належить. Таблиця 6×6 містить 16 різних квадратів 3×3, тому сума кратностей усіх клітинок таблиці, в яких записані одиниці, дорівнює $16a$. З іншого боку, неважко перевірити, що кожна клітинка міститься у такій самій кількості квадратів 4×4, як її кратність. Таблиця 6×6 містить 9 різних квадратів 4×4, тому сума кратностей всіх клітинок таблиці, в яких записані одиниці, дорівнює $9b = 16a$. Звідси випливає, що a ділиться на 9, проте $0 < a < 9$, суперечність.

Математичний експрес

1.1. *Відповідь:* -1.
Перепишемо рівність таким чином: $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = y - x$. Звідси $\frac{x^2-y^2}{xy} = y - x$, а оскільки $x \neq y$, то $\frac{x+y}{xy} = -1$.
1.2. *Відповідь:* 9.
Нехай $n = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$ — таке число, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Подамо число $9n$ у вигляді $10n - n$. Виконавши віднімання у стовпчик, можна переконатися, що

$$9n = \overline{a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_k-1-a_{k-1})(10-a_k)}.$$

Сума цифр цього числа дорівнює $a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_k - 1 - a_{k-1}) + (10 - a_k) = 9$.
1.3. *Відповідь:* 2.
Маємо $(4-a)^2 = (b+c)^2 = b^2+2bc+c^2 \le 2(b^2+c^2) = 2(6-a^2)$. Отже, $(4-a)^2 \le 2(6-a^2)$, або $3a^2 - 8a + 4 \le 0$, звідки $\frac{2}{3} \le a \le 2$. Значення $a = 2$ досягається при $b = c = 1$.



1.4. Нехай K, D і F — середини відрізків PQ, MQ і AB відповідно. Тоді $CK = \frac{1}{2}PQ$, $KD = \frac{1}{2}MP$, $DF = \frac{1}{2}QN$. Звідси

$$\tfrac{1}{2}(PQ + MP + QN) = CK + KD + DF.$$

Оскільки $CK + KD + DF \ge CF = \frac{1}{2}AB$, то дістаємо $PQ + MP + QN \ge AB$.

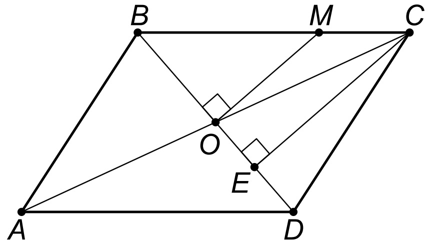
2.1. *Відповідь:* $(0, 0)$.
Оскільки $x^2 + 1 \ge 1$, $y^2 + 1 \ge 1$, то $\sqrt{x^2+1} \le x^2 + 1$ та $\sqrt{y^2+1} \le y^2 + 1$. Додаючи ці нерівності, одержуємо $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} \le x^2 + y^2 + 2$. Рівність досягається тоді й лише тоді, коли одночасно $\sqrt{x^2+1} = x^2 + 1$ та $\sqrt{y^2+1} = y^2 + 1$, тобто при $x = y = 0$.
2.2. *Відповідь:* 7 нулів.
Помітимо, що принаймні одне з даних чисел не ділиться на 5. Добуток двох інших чисел не може ділитися на 5^8. Справді, інакше або одне з них було б не меншим за

$5^5 = 3125$, або їх сума була б не меншою за $5^4 + 5^4 = 1250$. Таким чином, добуток abc не ділиться на 5^8, а тому його десятковий запис закінчується щонайбільше 7 нулями. Рівність $625 + 125 + 128 = 878$ показує, що запис числа abc може закінчуватися 7 нулями.

2.3. *Відповідь:* Не можна.

Припустимо, що потрібний графік скласти можна. Візьмемо довільного солдата. Тоді всіх інших солдатів можна розбити на пари, які будуть чергувати з обраним солдатом, а отже загальна кількість солдатів має бути непарною, суперечність.

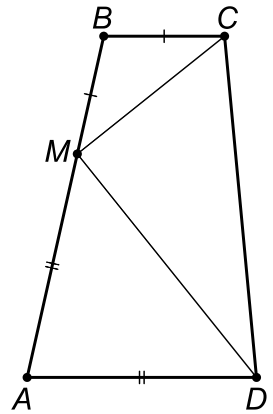
2.4. *Відповідь:* $BM : MC = 2 : 1$.



Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, а E — середина OD. Тоді $CO = \frac{1}{2}AC = AB = CD$. Отже, трикутник COD рівнобедрений, його медіана CE є висотою, звідки $OM \parallel CE$. Тому $BM : MC = BO : OE = 2 : 1$.

3.1. *Відповідь:* Усі прості числа $p \geq 13$.

Неважко перевірити, що числа 2, 3, 5, 7, 11 не можна подати як суму двох складених чисел. Будь-яке просте число $p \geq 13$ можна записати як $p = (p - 9) + 9$, причому $p - 9 \geq 4$ парне, а отже складене.



3.2. На стороні AB відмітимо точку M так, що $BM = BC$, $AM = AD$ (див. рисунок). Доведемо, що $\angle CMD = 90°$. Помітимо, що

$$\angle BMC = \tfrac{1}{2}(180° - \angle B) = 90° - \tfrac{1}{2}\angle B,$$
$$\angle AMD = \tfrac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \tfrac{1}{2}\angle A.$$

Тоді $\angle CMD = 180° - (\angle BMC + \angle AMD) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90°$. Прямі, що містять бісектриси кутів A і B, є серединними перпендикулярами сторін MD і MC прямокутного трикутника CMD, а отже перетинаються в центрі описаного кола цього трикутника — середині гіпотенузи CD.

3.3. *Відповідь:* $(2, 1, 1)$.

З першого рівняння випливає, що $y < x$, $z < x$. Звідси $y \leq x - 1$, $z \leq x - 1$. Тоді з другого рівняння дістаємо $x^2 = 2(y+z) \leq 2(x-1+x-1)$, тобто $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, звідки $x = 2$. Підставляючи отримане значення x в друге рівняння, одержуємо $y + z = 2$. Остання рівність можлива лише при $y = z = 1$. Перевірка показує, що трійка $(2, 1, 1)$ задовольняє перше рівняння системи.

3.4. *Відповідь:* Можна.

Розглянемо многочлен $Q(x) = P(x) - P(-x)$. Цей многочлен має принаймні 2012 коренів, а його степінь не перевищує 2011. Це означає, що $Q(x) \equiv 0$.