Дванадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. У 4 ящиках лежать 24 яблука. Хробак-оптиміст впевнений, що може з'їсти не більше половини яблук так, щоб у деяких 3 ящиках яблук стало порівну. Чи може виявитися, що він неправий?
2. При яких натуральних $n \geq 2$ число n^2 можна подати як суму декількох різних натуральних чисел, які не перевищують $2n$?
3. Нехай $ABCD$ паралелограм ($AB < BC$). Бісектриса кута BAD перетинає сторону BC у точці K, а бісектриса кута ADC перетинає діагональ AC у точці F. Відомо, що $KD \perp BC$. Довести, що $KF \perp BD$.
4. Ельза малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них N дорогами. Потім Ельза та Сьюзі по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Ельза). Якщо ці міста сполучені дорогою, то виграє Ельза, а якщо ні, то Сьюзі. Знайти найменше N, при якому Ельза має виграшну стратегію.
5. Чи існують такі натуральні числа $a \neq b$, що $a + b$ є квадратом натурального числа, а $a^3 + b^3$ є четвертим степенем натурального числа?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Двенадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. В 4 ящиках лежат 24 яблока. Червяк-оптимист уверен, что может съесть не более половины яблок так, чтобы в некоторых 3 ящиках яблок стало поровну. Может ли оказаться, что он не прав?
2. При каких натуральных $n \geq 2$ число n^2 можно представить как сумму нескольких различных натуральных чисел, не превышающих $2n$?
3. Пусть $ABCD$ параллелограм ($AB < BC$). Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ADC пересекает диагональ AC в точке F. Известно, что $KD \perp BC$. Доказать, что $KF \perp BD$.
4. Эльза рисует на карте 2013 городов и соединяет некоторые из них N дорогами. Потом Эльза и Сьюзи по очереди зачеркивают города, пока не останется ровно два города (первый город зачеркивает Эльза). Если эти города соединены дорогой, то выигрывает Эльза, а если нет, то Сьюзи. Найти наименьшее N, при котором Эльза имеет выигрышную стратегию.
5. Существуют ли такие натуральные числа $a \neq b$, что $a + b$ — квадрат натурального числа, а $a^3 + b^3$ — четвертая степень натурального числа?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The twelfth Kyiv mathematical festival
8-th form

1. There are 24 apples in 4 boxes. An optimistic worm is convinced that he can eat no more than half of the apples such that there will be 3 boxes with equal number of apples. Is it possible that he is wrong?
2. For which positive integers $n \geq 2$ it is possible to represent the number n^2 as a sum of several distinct positive integers not exceeding $2n$?
3. Let $ABCD$ be a parallelogram ($AB < BC$). The bisector of the angle BAD intersects the side BC at the point K, and the bisector of the angle ADC intersects the diagonal AC at the point F. Suppose that $KD \perp BC$. Prove that $KF \perp BD$.
4. Elza draws 2013 cities on the map and connects some of them with N roads. Then Elza and Susy erase cities in turns until just two cities left (first city is to be erased by Elza). If these cities are connected with a road then Elza wins, otherwise Susy wins. Find the smallest N for which Elza has a winning strategy.
5. Do there exist positive integers $a \neq b$ such that $a + b$ is a perfect square and $a^3 + b^3$ is a fourth power of an integer?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Дванадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Для довільних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a+c \leqslant ac$ та $b+d \leqslant bd$, довести, що $ab+cd \geqslant 8$.
2. При яких натуральних $n \geq 2$ число n^2 можна подати як суму n різних натуральних чисел, які не перевищують $\frac{3n}{2}$?
3. Нехай $ABCD$ паралелограм ($AB < BC$). Бісектриса кута BAD перетинає сторону BC у точці K, а бісектриса кута ADC перетинає діагональ AC у точці F. Відомо, що $KD \perp BC$. Довести, що $KF \perp BD$.
4. Ельза малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них N дорогами. Потім Ельза та Сьюзі по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Ельза). Якщо ці міста сполучені дорогою, то виграє Ельза, а якщо ні, то Сьюзі. Знайти найменше N, при якому Ельза має виграшну стратегію.
5. Чи існують такі натуральні числа $a \neq b$, що $a+b$ є квадратом натурального числа, а a^3+b^3 є четвертим степенем натурального числа?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Двенадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Для любых положительных чисел a, b, c, d таких, что $a+c \leqslant ac$ и $b+d \leqslant bd$, доказать, что $ab+cd \geqslant 8$.
2. При каких натуральных $n \geq 2$ число n^2 можно представить как сумму n различных натуральных чисел, не превышающих $\frac{3n}{2}$?
3. Пусть $ABCD$ параллелограм ($AB < BC$). Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ADC пересекает диагональ AC в точке F. Известно, что $KD \perp BC$. Доказать, что $KF \perp BD$.
4. Эльза рисует на карте 2013 городов и соединяет некоторые из них N дорогами. Потом Эльза и Сьюзи по очереди зачеркивают города, пока не останется ровно два города (первый город зачеркивает Эльза). Если эти города соединены дорогой, то выигрывает Эльза, а если нет, то Сьюзи. Найти наименьшее N, при котором Эльза имеет выигрышную стратегию.
5. Существуют ли такие натуральные числа $a \neq b$, что $a+b$ — квадрат натурального числа, а a^3+b^3 — четвертая степень натурального числа?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The twelfth Kyiv mathematical festival
9-th form

1. For every positive a, b, c, d such that $a+c \leqslant ac$ and $b+d \leqslant bd$ prove that $ab+cd \geqslant 8$.
2. For which positive integers $n \geq 2$ it is possible to represent the number n^2 as a sum of n distinct positive integers not exceeding $\frac{3n}{2}$?
3. Let $ABCD$ be a parallelogram ($AB < BC$). The bisector of the angle BAD intersects the side BC at the point K, and the bisector of the angle ADC intersects the diagonal AC at the point F. Suppose that $KD \perp BC$. Prove that $KF \perp BD$.
4. Elza draws 2013 cities on the map and connects some of them with N roads. Then Elza and Susy erase cities in turns until just two cities left (first city is to be erased by Elza). If these cities are connected with a road then Elza wins, otherwise Susy wins. Find the smallest N for which Elza has a winning strategy.
5. Do there exist positive integers $a \neq b$ such that $a+b$ is a perfect square and a^3+b^3 is a fourth power of an integer?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Дванадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. При яких натуральних $n \geq 2$ число n^2 можна подати як суму n різних натуральних чисел, які не перевищують $\frac{3n}{2}$?

2. Для довільних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a + c \leqslant ac$ та $b + d \leqslant bd$, довести, що
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \geqslant 4.$$

3. Нехай $ABCD$ паралелограм ($AB < BC$). Бісектриса кута BAD перетинає сторону BC у точці K, а бісектриса кута ADC перетинає діагональ AC у точці F. Відомо, що $KD \perp BC$. Довести, що $KF \perp BD$.

4. Сьюзі малює на карті 2013 міст та сполучає деякі з них N дорогами (два міста або сполучені єдиною дорогою, або не сполучені). Потім Сьюзі та Ельза по черзі закреслюють міста, поки не залишиться рівно два міста (перше місто закреслює Сьюзі). Якщо ці міста сполучені дорогою, то виграє Ельза, а якщо ні, то Сьюзі. Знайти найменше N, при якому Ельза має виграшну стратегію.

5. Чи існують такі натуральні числа $a \neq b$, що $a + b$ є квадратом натурального числа, а $a^3 + b^3$ є четвертим степенем натурального числа?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Двенадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. При каких натуральных $n \geq 2$ число n^2 можно представить как сумму n различных натуральных чисел, не превышающих $\frac{3n}{2}$?

2. Для любых положительных чисел a, b, c, d таких, что $a + c \leqslant ac$ и $b + d \leqslant bd$, доказать, что
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \geqslant 4.$$

3. Пусть $ABCD$ – параллелограм ($AB < BC$). Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ADC пересекает диагональ AC в точке F. Известно, что $KD \perp BC$. Доказать, что $KF \perp BD$.

4. Сьюзи рисует на карте 2013 городов и соединяет некоторые из них N дорогами (два города или соединены единственной дорогой, или не соединены). Потом Сьюзи и Эльза по очереди зачеркивают города, пока не останется ровно два города (первый город зачеркивает Сьюзи). Если эти города соединены дорогой, то выигрывает Эльза, а если нет, то Сьюзи. Найти наименьшее N, при котором Эльза имеет выигрышную стратегию.

5. Существуют ли такие натуральные числа $a \neq b$, что $a + b$ — квадрат натурального числа, а $a^3 + b^3$ – четвертая степень натурального числа?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The twelfth Kyiv mathematical festival
10-th form

1. For which positive integers $n \geq 2$ it is possible to represent the number n^2 as a sum of n distinct positive integers not exceeding $\frac{3n}{2}$?

2. For every positive a, b, c, d such that $a + c \leqslant ac$ and $b + d \leqslant bd$ prove that
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{cd}{c+d} + \frac{da}{d+a} \geqslant 4.$$

3. Let $ABCD$ be a parallelogram ($AB < BC$). The bisector of the angle BAD intersects the side BC at the point K, and the bisector of the angle ADC intersects the diagonal AC at the point F. Suppose that $KD \perp BC$. Prove that $KF \perp BD$.

4. Susy draws 2013 cities on the map and connects some of them with N roads (two cities are connected with a single road or not connected). Then Susy and Elza erase cities in turns until just two cities left (first city is to be erased by Susy). If these cities are connected with a road then Elza wins, otherwise Susy wins. Find the smallest N for which Elza has a winning strategy.

5. Do there exist positive integers $a \neq b$ such that $a + b$ is a perfect square and $a^3 + b^3$ is a fourth power of an integer?

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.